TD Maths discrètes

William Hergès*

17 octobre 2025

*Sorbonne Université

Exercice 1

Soit $(P_n)_{n\geqslant 2}$ une propriété telle que :

$$P_n : \quad \overline{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} = \bigcap_{i=0}^{n} \bar{A}_i \quad \wedge \quad \overline{\bigcap_{i=0}^{n} A_i} = \bigcup_{i=0}^{n} \bar{A}_i$$

P_2 est vraie (c'est la loi de de Morgan).

Posons $n \geqslant 2$ tel que P_n soit vraie.

Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des parties de E. On pose $B_1 = A_n \cup A_{n+1}$ et $B_2 = A_n \cap A_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i=0}^{n-1} (A_i) \cup B_1} &= \bigcap_{i=0}^{n-1} (\bar{A}_i) \cup \bar{B}_1 \text{ hypothèse de récurrence} \\ &= \bigcap_{i=0}^{n+1} \bar{A}_i \end{aligned}$$

de même pour la deuxième partie de P_n.

Alors, P_{n+1} est vraie.

Ainsi, P_n est vraie pour tout n supérieur ou égale à 2.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_a(n)$ soit vraie.

$10^n \times 10 + a = 9 \times 10^n + 10^n + a$, donc c'est divisible par 9 car 9×10^n l'est et $10^n + a$ l'est aussi par hypothèse. Alors,

$$P_a(n) \implies P_a(n+1)$$

Prenons le cas particulier $a = 9$. On a que $9|10^0 + a \iff 9|10$ est faux, donc $P_a(n)$ n'est pas vraie pour tout n. Pour que $P_a(n)$ soit vraie pour tout n, il faut que $9|a+1$, i.e. $a = 9k+1$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3

$$P_n : \quad H_{2^n} \geqslant 1 + n/2$$

$P_0 : \quad H_1 = 1 \geqslant 1 + 0/2$

Soit n telle que P_n soit vraie. On a donc que $H_{2^n} \geqslant 1 + n/2$. **TODO : refaire**

Exercice 4

1. $F_2 = F_1$, donc P_1 est vraie.

   Soit $n > 0$ tel que P_n soit vraie.

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_1 + \ldots + F_{2n-1} \\ F_{2n+2} &= F_{2n} + F_{2n+1} \\ F_{2(n+1)} &= F_1 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n+1} \end{aligned}$$

   Donc P_{n+1} est vraie.

5. $F_1 \geqslant 0$ et $F_1 \leqslant \varphi$, donc P_1 est vraie.

   Soit $n > 0$ tel que $P_n, \ldots, P_1$ soit vraie.

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{n-2} \leqslant & F_n & \leqslant \varphi^{n-1} \\ \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} \leqslant & F_n + F_{n-1} & \leqslant \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \\ \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} \leqslant & F_{n+1} & \leqslant \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \end{array}$$