TD Maths discrètes

William Hergès*

10 octobre 2025

*Sorbonne Université

Retour sur les copies

Les résultats ne sont pas bons. Tout le monde devrait pouvoir avoir $5/10$ (la moyenne est à $4/10$). Il y a un problème de vitesse et d'apprentissage du cours.

Exercice 11

Soient a un plus grand élément de A et m le maximum de A. Par anti-symétrie, $a \preceq M$ et $M \preceq a$ par leurs définitions, alors $a = M$. Si m_1 et m_2 sont deux maximums de A, par anti-symétrie, ils sont égaux.

$\mathbb{N} \cup \{a\}$ munie de $\leqslant$ possède un élément maximal (a), mais pas de maximum (il n'existe pas de majorant dans $\mathbb{N}$).

Soient m_1 et m_2 deux éléments maximals de A. Comme $\preceq$ est totale, on a $m_1 \preceq m_2$ et $m_2 \preceq m_1$. Par anti-symétrie, $m_1 = m_2$, i.e. l'élément maximal est unique.

Exercice 10

Il y a le même nombre d'élément dans $P = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$ et dans $E = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$. Si on définit f de P dans E tels que $f(p) = \prod_{a \in p} a$ où l'équivalent dans $\mathbb{N}$ est $\varnothing = 1$, $\{a\} = 2$, $\{b\} = 3$ et $\{c\} = 7$. Cette application est bijective (la réciproque est $f^{-1}(e) = \{p, p|e\}$ avec la même clé). Elle est aussi monotone car $p_1 \subseteq p_2$ et $f(p_1)|f(p_2)$ car $f(p_2)$ est une mulitple de p_1.

Sinon, on dessine le graphe couvrant : c'est plus propre.

Version propre de mon idée : après avoir défini les valeurs, on définit f comme étant $f(A \cup B) = f(A) \times f(B)$.

Exercice 16

Elle n'est clairement pas bijective car $8 = f(\{1, 3, 4\}) = f(\{8\})$.

Exercice 8

« α est un préfixe de β » est :

$$\forall k < \min(n_1, n_2), \quad \alpha_k = \beta_k$$

avec n_1 la taille de α et n_2 est la taille de β. On note cette relation $\preceq$.

$$(\exists i, \forall k < i, a_k = b_k \wedge a_i \preceq_A b_i) \vee a = b$$

C'est un ordre total car $\preceq_A$ est total.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a^n b \preceq a^{n+1} b$. Donc $\preceq$ n'est pas bien fondé.

Exercice en plus

Soit A un alphabet composé de $\{a, b\}$. On définit un langage $L \subseteq A^*$ par induction structurelle :

- $a \in L$
- $\forall (u, v) \in L^2, uvb \in L$

Soit $u \in L$ où u possède une taille de 2. Ainsi, u est soit égal à a, soit de la forme v_1v_2b. Donc b est forcément dans u. Ainsi, $v_1 = a$ ou $v_1 = \varepsilon$ et v_2 est le choix restant. Or, ε n'est pas dans L, donc u est impossible.

$u \in L$. Donc aua est aussi dans L. Ainsi, le miroir de aua est $a\tilde{u}a$. Donc bub est aussi dans L. Ainsi, le miroir de bub est $b\tilde{u}b$. Comme $\tilde{u} = u$, on a que la propriété est vraie.