TD Maths discrètes

William Hergès*

3 octobre 2025

*Sorbonne Université

Exercice 1

1. Maj $= \{1, 2, 3\}$
2. Min $= \{6, 7, 8\}$
3. $\sup V = 3$
4. $\inf V = 6$

Exercice 3

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. On a que $(x, y) \preceq (x, y)$ car $(x, y) = (x, y)$. $\preceq$ est réflexive.

Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{N}^2$ tel que $(x, y) \preceq (x', y')$ et $(x', y') \preceq (x, x)$. On a que $x + y < x' + y' \wedge x' + y' < x + y$ ou $(x, y) = (x', y')$. La première possibilité est impossible. Donc la deuxième est forcément vraie. Ainsi, $\preceq$ est anti-symétrique.

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $(c, d) \in \mathbb{N}^2$ et $(e, f) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$(a, b) \preceq (c, d) \wedge (c, d) \preceq (e, f)$$

Alors, soit $a+b < c+d$, soit $(a, b) = (c, d)$ et soit $c+d < e+f$, soit $(c, d) = (e, f)$ Si $a + b < c + d$, alors $a + b < e + f$ dans tous les cas. Si $(a, b) = (c, d)$, on a que $(a, b) \preceq (e, f)$ est vraie.

Ainsi, $\preceq$ est une relation d'ordre.

Cet ordre n'est pas total car $(1, 0)$ et $(0, 1)$ ne sont pas en relations.

Soit (a, b) un élément plus petit que $(0, 0)$. On a donc que $a + b < 0 + 0 \iff a + b < 0$ ou $(a, b) = (0, 0)$. La première possibilité est impossible, donc $\min\{\mathbb{N}^2, \preceq\} = (0, 0)$. Ainsi, cet élément est bien fondé.

Exercice 4

Soit x. On a que x divise x. Donc $|$ est réflexive.

Soient $(x, y) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^2$ tels que :

$$x|y \wedge y|x$$

Il existe donc k_1 et k_2 dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$x = k_1 y \wedge y = k_2 x$$

Or

$$k_1 k_2 y = y$$

Donc

$$k_1 = k_2 = 1$$

i.e.

$$x = y$$

Ainsi, $|$ est anti-symétrique.

Soient $(x, y, z) \in (\mathbb{N}\backslash\{0,1\})^3$ tels que :

$$x|y \wedge y|z$$

Il existe donc k_1 et k_2 dans $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$x = yk_1 \wedge y = zk_2$$

Or

$$x = zk_2k_1$$

Donc

$$x|z$$

Ainsi, $|$ est transitive.

Alors, $|$ est une relation d'ordre.

Les éléments minimaux de E sont les nombres premiers car ils ne sont divisibles que par 1 (qui n'est pas dans E) et par lui-même.

E ne possède pas d'éléments maximaux. Si x est un élément maximal, alors $2x$ est plus grand que x et est divisé par x, donc x n'est pas un élément maximal.

Exercice 5

Ici, $\inf$ est le PGCD de x et y et $\sup$ est le PPCM.

Les minorants de A sont :

$$\{1, 3\}$$

Les minorants de B sont :

$$\{1\}$$

Les majorants de A sont :

$$\{\sup(A)k|k \in \mathbb{N}^*\} = \left\{\frac{15 \times 21}{3}k|k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Les majorants de B sont :

$$\{\sup(B)k|k \in \mathbb{N}^*\} = \left\{\frac{14 \times 21}{7}k|k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

A ne possède ni de plus petit, ni de plus grand élément. B possède un plus petit élément (1), mais pas de plus grand.

$\{1, 3\}$ sont les minorants de A. Les majorants de A sont :

$$\{\sup(A)k|\ k \in \mathbb{N}^*\} = \left\{\frac{12 \times 15}{3}k|\ k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

$\inf A = \min A = 3$, et les éléments minimaux sont $\{3\}$. Il n'a pas de borne sup, ni d'éléments maximaux, ni de plus grands éléments.

Les minorants et majorants ne sont pas forcément dans A.

Les éléments minimaux et maximaux sont dans A. Ce sont les minorants et les majorants dans A.

Les bornes ne sont pas forcément dans A.

Le minimum et le maximum sont dans A. C'est la borne inférieur et supérieur dans A. Ils sont aussi appelés le plus petit et le plus grand élément.