TD Maths discrètes

William Hergès*

26 septembre 2025

*Sorbonne Université

Exercice 6

1. Supposons que R soit réflexive. On a que pour tout x dans R, $(x, x) \in R$, ce qui est la définition de l'identité.

   Supposons que $\mathrm{Id}_E \subseteq R$. On a que pour tout x dans R, $(x, x) \in R$ car $(x, x) \in \mathrm{Id}_E$.
2. $$\begin{aligned} R \text{ symétrique } &\iff \forall (x, y) \in E^2, (x, y) \in R \implies (y, x) \in R \\ &\iff R = \{(x, y) \in R | (y, x) \in R\} \\ &\iff R = R^{-1} \end{aligned}$$
3. À faire par équivalence classiquement.

Exercice 8

Si R est relation d'équivalence sur E, alors la classe d'équivalence de $a \in R$ est l'ensemble :

$$\{(a,x) \in R\}$$

1. R est réflexive, donc $a \in [a]$ car $(a,a) \in R$
2. Si $[a] = [b]$, alors pour tout x dans A, on a $(a,x) \in R$ et $(b,x) \in R$, donc $(a,b) \in R$ par symétrie et transitivité.

   Pareil dans l'autre sens.
3. Supposons que $[a] \cap [b] \neq \varnothing$. Alors, $\exists x \in [a] \cap [b]$ tel que $(a,x) \in R$ et $(b,x) \in R$. Par symétrie et transitivité, on a $(b,x) \in R \iff (x,b) \in R \iff (a,b) \in R$. Absurde car si $(a,b) \in R$, on a que $[a] = [b]$, ce qui est faux par hypothèse.
4. $\{[a] | a \in A\}$ est une partition de A car
   - tous les éléments de $[a]$ pour tout $a \in A$ sont dans A par définition ;
   - toutes les classes d'équivalence sont disjointes (3) ;
   - tous les éléments de A sont présents dans cet ensemble car $a \in [a]$ (1).

Ceci est un résultat important !

Exercice 9

L'application $\{(a, b), (b, b)\}$ dans $\{a, b\}$ n'est ni injective, ni surjective.

1. f_1 est injective, mais pas surjective, car il n'existe pas d'inverse sur $\mathbb{N}$. f_2 est bijective, car il existe un inverse sur $\mathbb{Q}$.
2. f est surjective, car $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 0$.
3. f est surjective, car $\forall x \in \mathbb{N}, f(x, 0) = x$ et $f(1, 0) = f(0, 1)$.
4. f est bijective, car :
   — si $f(n)$ est pair, alors son antécédent est $n + 1$
   — si $f(n)$ est impair, alors son antécédent est $n - 1$
   — si $f(n_1) = f(n_2)$, alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$ ou $n_1 - 1 = n_2 - 1$, i.e. $n_1 = n_2$
5. f n'est pas surjective, car les mots ne finissant par par b ne sont jamais atteint. f est injective, car $f(u_1) = f(u_2) \implies u_1.b = u_2.b \implies u_1 = u_2$.

Il existe $2^3 = 9$ applications différentes de $\{a, b, c\}$ vers $\{1, 2\}$ (pour chaque élément de $\{a, b, c\}$, on possède deux choix), dont aucune injective, $3 \times 2 = 6$ surjectives (on choisit quel élément est le premier et quel élément est le deuxième, le troisième est libre) et aucune bijective (car aucune n'est injective).

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si n est pair, alors $n+1$ est impair. Donc,

$$\exists! p \in \mathbb{N}, \quad n+1 = 2p+1$$

On pose $x = 0$ et $y = p$, alors

$$n = 2^0(2p+1) - 1 = 2^x(2y+1)$$

Par conséquent, les nombres pairs s'écrivent comme :

$$g(0,p)$$

Si n est impair, il existe un unique p dans $\mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Donc,

$$n+1 = 2p+2 = 2(p+1)$$

Or, un nombre pair s'écrit d'une manière unique avec $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ avec q non nul comme :

$$2^q(2r+1)$$

On pose $x = q$ et $p = r$, alors

$$n = 2^q(2r+1) - 1 = 2^x(2y+1) - 1$$

Par conséquent, les nombres pairs s'écrivent comme :

$$g(q,r)$$