TD Maths discrètes

William Hergès*

19 septembre 2025

*Sorbonne Université

Exercice 1

1. $S_1 \times S_1 = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$
2. Pour $S = S_1$, on a :

   $$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, S\}$$

   Pour $S = S_2$, on a :

   $$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{\{1,4\}\}, S\}$$

   Pour $S = S_3$, on a :

   $$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, S\}$$

3. Les partitions possibles de $\{1,2,3\}$ sont :

   $$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

   $$\{\{1\},\{2,3\}\}$$

   $$\{\{2\},\{1,3\}\}$$

   $$\{\{1\},\{1,2\}\}$$

   $$\{\{1,2,3\}\}$$

Exercice 2

Question 1

Montrons que $x \in A \cap \overline{A \cap B}$ est dans $A \cap \bar{B}$.

Soit x dans $A \cap \overline{A \cap B}$, alors x est dans A et $\overline{A \cap B}$. Comme x n'est pas dans $\bar{A}$ (il est dans A), il est forcément dans $\bar{B}$, ainsi on obtient que x est bien dans A et $\bar{B}$. Alors, $x \in A \cap \bar{B}$.

Montrons que $x \in A \cap \bar{B}$ est dans $A \cap \overline{A \cap B}$.

Soit x dans $A \cap \bar{B}$, alors x est dans A et $\bar{B}$. D'après la loi de De Morgan, on a :

$$A \cap \overline{A \cap B} = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Or, comme x est dans A, il ne peut pas être dans $\bar{A}$ par définition. Donc x est forcément dans $\bar{B}$. Ainsi, $x \in A \cap \bar{B}$.

Par conséquent,

$$A \cap \bar{B} = A \cap \overline{A \cap B}$$

Question 4

$$A \cup B \subseteq A \cup C \quad \wedge \quad A \cap B \subseteq A \cap C$$

Soit x dans B.

Si x n'est pas dans A, il est dans C (car $A \cup B \subseteq A \cup C$).

Si x est dans A, il est dans $A \cap C$, donc il est aussi dans C.

Alors, x est toujours dans C. Ainsi $B \subseteq C$.

Pour avoir $B = C$, on a besoin d'avoir $A \cup C \subseteq A \cup B$ en plus.

Question 6

Si $A = \{0, 1, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$, alors

$$\{3, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Pourtant,

$$\{3, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

Donc, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ est faux.

$$
\begin{aligned}
& E \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\
\iff & E \subseteq A \cup B \\
\iff & E \subseteq A \cup B \\
\iff & E \subseteq A \wedge E \subseteq B \\
\iff & E \subseteq \mathcal{P}(A) \wedge E \subseteq \mathcal{P}(B) \\
\iff & E \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)
\end{aligned}
$$

Exercice 3

$$S = \{(a, b, c) \in D^3 | c = a + b\}$$

Exercice 4

Question 1

R n'est pas réflexive, car $R(2,2)$ est faux.

R est symétrique, car on a $R(1,1)$, $R(2,3)$ et $R(3,2)$. Elle ne peut donc pas être antisymétrique.

Elle n'est pas transitive, car on a $R(2,3) \wedge R(3,2)$ qui n'implique pas $R(2,2)$.

Question 4

On a :

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)$$

si, et seulement si, $x_1 \leqslant y_1$ et $x_2 \leqslant y_2$.

Une relation d'ordre est une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

$$(x, y) \preceq (x, y) \iff x \leqslant x \wedge y \leqslant y$$

est vraie, donc $\preceq$ est réflexive.

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \preceq (x_1, x_2) \\ \iff &(x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2) \wedge (y_2 \leqslant x_2 \wedge y_1 \leqslant x_1) \end{aligned}$$

Alors, on a que $x_1 = y_1$ et que $x_2 = y_2$, i.e. $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ dans ce cas. $\preceq$ est donc antisymétrique.

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \wedge (y_1, y_2) \preceq (z_1, z_2) \\ \iff &(x_1 \leqslant y_1 \wedge x_2 \leqslant y_2) \wedge (y_2 \leqslant z_2 \wedge y_1 \leqslant z_1) \\ \iff &(x_1 \leqslant z_1 \wedge x_2 \leqslant z_2) \\ \iff &(x_1, x_2) \preceq (z_1, z_2) \end{aligned}$$

Alors, elle est transitive. Ainsi, il s'agit d'une relation d'ordre.

Elle n'est pas totale car $(0,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables.

Question 5

Une relation est dite d'ordre si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Soit ε dans $\mathbb{R}$. On pose $x = 0$ et $z = 2\varepsilon$.

On a que $R(x, \varepsilon)$ est vraie (trivial). On a que $R(\varepsilon, 2\varepsilon$ est vraie (trivial). On a que $R(x, 2\varepsilon)$ est faux, car :

$$|0 - 2\varepsilon| > \varepsilon$$

Ainsi, R n'est pas une relation d'ordre.

Exercice 5

Question 1

$$
\begin{aligned}
R &= \{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5),(4,5)\} \\
R^{-1} &= \{(3,1),(5,1),(3,2),(5,2),(5,3),(5,4)\} \\
R^{-1}.R &= \{(3,3),(3,5),(5,5),(5,3)\} \\
R.R^{-1} &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}
\end{aligned}
$$

Question 2

On a :

$$R.S = \{(x,z) \in X \times Z | \exists y \in Y, R(x,y) \wedge S(y,z)\}$$

Donc :

$$(R.S)^{-1} = \{(z,x) \in Z \times X | \exists y \in Y, R(x,y) \wedge S(y,z)\}$$

Or :

$$
\begin{aligned}
S^{-1}.R^{-1} &= \{(z,x) \in Z \times X | \exists y \in Y, R(x,y) \wedge S(y,z)\} \\
&= (R.S)^{-1}
\end{aligned}
$$

(Ici il y a juste une étape cachée qui transforme $R^{-1}(y,x)$ en $R(x,y)$, mais elle est triviale. Idem pour S.)