Induction

William Hergès[1]

20 octobre 2025

1. Sorbonne Université

Définition 1

Soient E un ensemble, X_0 une partie de E et $\mathcal{F}$ un ensemble de règles données sous la forme d'applications distinctes $f : E^{a(f)} \to E$, avec $a(f)$ l'arité de l'application f.

L'ensemble définie inductivement à l'aide de E, X_0 et $\mathcal{F}$, est le plus petit ensemble X de E vérifiant :

— $X_0 \subseteq X$

— pour toute application f d'arité n de $\mathcal{F}$, pour tous $x_1, \ldots, x_n$, si $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, alors $f(x_1, \ldots, x_n)$ est dans X.

Exemple 1

L'ensemble X des entiers pairs est définissable comme :

$$X \begin{cases} X_0 & = \{0\} \\ \mathcal{F} & = \{x \longmapsto x+2\} \end{cases}$$

Définition 2

Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0 et $\mathcal{F}$.

On peut définir par une fonction g par induction structurelle de la façon suivante :

— tous les x dans X_0 doivent être données explicitement

— pour toute règle f dans $\mathcal{F}$ d'arité n, on donne

$$g(f(x_1, \ldots, x_n)) = h(x_1, \ldots, x_n, g(x_1), \ldots, g(x_n))$$

Exemple 2

La hauteur h d'un arbre binaire est définie par :

— $h(\varnothing) = 0$

— $h((a, g, d)) = 1 + \max(h(g), h(d))$

Le nombre d'éléments $\mathcal{N}$ d'un arbre binaire est défini par :

— $\mathcal{N}(\varnothing) = 0$

— $\mathcal{N}(a, g, d) = 1 + \mathcal{N}(g) + \mathcal{N}(d)$

Théorème 2.1

Soit X un ensemble défini par induction structurelle à partir de E, X_0 et F. Soit P une propriété vraie sur les éléments de X.

Base Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X_0$,

Induction Si, pour tout f dans $\mathcal{F}$ d'arité n, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in X$, **si** $P(x_1), \ldots, P(x_n)$ sont vraies, **alors** $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie.

Alors pour tous x dans X, $P(x)$ est vraie.

Il s'agit de la preuve par induction structurelle.

☐ *Démonstration*. Soit $V = \{x \in X | P(x)\}$.

— $V \subseteq X$

— Par la base, on a $X_0 \subseteq V$. Soient f dans $\mathcal{F}$ d'arité n et $(x_1, \ldots, x_n) \in V^n$. Alors, par induction, $P(f(x_1, \ldots, x_n))$ est vraie. Donc $f(x_1, \ldots, x_n)$ est dans V. Par définition, X est le plus petit ensemble de vérifiant ces conditions, alors $X \subseteq V$

Ainsi, $X = V$ et $P(x)$ est vraie pour tout x dans X.

■