Relations d'ordre, ensembles ordonnés

William Hergès[1]

5 octobre 2025

1. Sorbonne Université

Table des matières

1. Ensemble ordonné

1.1. Définition

Définition 1

Une relation d'ordre $\preceq$ est une relation binaire sur E si et seulement si :
- réflexive
- anti-symétrique
- transitive

L'ordre strict $\prec$ est associé à $\preceq$: c'est la même, sauf qu'elle n'est pas réflexive :

$$\prec=\preceq \setminus \mathrm{Id}_E$$

Définition 2

Une relation d'ordre $\preceq$ est :
- totale si et seulement si $\preceq$ permet toujours de comparer deux éléments quelconques de E
- partielle s'il existe au moins deux éléments de E incomparables avec $\preceq$

Définition 3

$(E, \preceq)$ est un ensemble :
- totalement ordonné si $\preceq$ est un ordre total.
- partiellement ordonné si $\preceq$ est un ordre partiel.

Exemple 1

$(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

$(\mathcal{P}(F), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordoné (pour F un ensemble quelconque).

$(\mathbb{N}^*, |)$ est aussi partiellement ordoné, où

$$| = \{(a,b) | \exists k \in \mathbb{N}^*, b = na\}$$

(c'est la relation divise.)

☐ *Démonstration.* Preuve du deuxième exemple.

Soit F un ensemble.

Montrons que $\subseteq$ est un ordre pour $\mathcal{P}(F)$.
- Soit $A \in \mathcal{P}(F)$. Trivialement, $A \subseteq A$. Alors, $\subseteq$ est réflexive.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Supposons que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$. Alors, $A = B$ par définition.
- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(F)^3$ avec $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$. Si A est l'ensemble vide, il est inclu dans tous les ensembles. Donc $A \subseteq C$. Si A n'est pas l'ensemble vide, tous ses éléments sont

dans B. Or, tous les éléments de B sont dans C. Donc, tous les éléments de A sont dans C. Alors, $A \subseteq C$.

Ainsi, $\subseteq$ est bien un ordre pour $\mathcal{P}(F)$.

Montrons que $\subseteq$ est un ordre partiel.

Supposons que F contient au moins deux éléments.

Soit $(x, y) \in F^2$, deux éléments différents. Soient $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.

On a que $A \not\subseteq B$ et que $B \subseteq A$. Donc, $\subseteq$ est partiel dans ce cas.

Si F est vide, alors $\mathcal{P}(F)$ contient un unique élément. Cet ensemble est totalement ordonné.

Si F est un singleton, alors $\mathcal{P}(F)$ contient F et l'ensemble vide. Cet ensemble est totalement ordonné.

La slide est ainsi fausse, mais les ensembles à moins de deux éléments sont peux intéressants.

■

1.2. Représentation d'une relation d'ordre

Définition 4

La représentation d'une relation d'ordre R sur un ensemble E est le graphe *minimal* représentant une relation $\rightarrow$, telle que :

— la fermeture réflexive et transitive $\rightarrow^*$ de $\rightarrow$ correspond exactement à la relation R

— $\rightarrow$ est la plus petite relation dont la fermeture réflexo-transitive est égale à la relation R

— $\rightarrow$ contient tous les couples $(a, b) \in R$ tels que $a \neq b$ et que :

$$\forall c \in E, c \neq a, c \neq b, \quad (a, c) \notin R \vee (c, b) \notin R$$

On a donc que $\rightarrow$ s'obtient en supprimant de R :

— les couples $(x, x) \in R$ (réflexivité)

— les couples pouvant se déduire par transitivité

On dit que ce graphe est couvrant.

Proposition 4.1

Le coupe (a, b) appartient à R si, et seulement si, il existe un chemin dans le graphe couvrant.

Exemple 2

Graphe couvrant de $\leqslant$ sur $\mathbb{N}$:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

1.3. Monotonie

Définition 5

Soient $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ deux ensemble ordonnés.

L'application $f : E_1 \to E_2$ est dite monotone si :

$$\forall (x,y) \in E_1^2, \quad x \preceq_1 y \implies f(x) \preceq_2 f(y)$$

Une application monotone préserve les relations d'ordre.

Exemple 3

On se place dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $f(n) = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\}$ est monotone.

$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $g(n) = \{n\}$ ne l'est pas par contre !

Proposition 5.1

Deux ensembles ordonnés $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : E_1 \to E_2$ telle que f et f^{-1} sont monotones.

Exemple 4

Soient $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ deux ensembles ordonnés.

$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $f(n) = \{k | k \leqslant n\}$ est monotone.

$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $g(n) = \{n\}$ n'est pas monotone.

Attention 1

Une bijection f peut être monotone sans que f^{-1} ne le soit !

1.4. Minimum, maximum, bornes

Définition 6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et X une partie de E.

Un élément minimal x de X est un élément tel que :

$$\forall y \in X, \quad y \preceq x \implies y = x$$

Un élément maximale x de X est un tel que :

$$\forall y \in X, \quad x \preceq y \implies x = y$$

Définition 7

On dit que $e \in E$ est un minorant de X si :

$$\forall x \in X, \quad e \preceq x$$

On dit que $e \in E$ est un majorant de X si :

$$\forall x \in X, \quad x \preceq e$$

La différence avec l'élément minimal, c'est que e n'est pas forcément dans X ! La différence avec l'élément maximal, c'est que e n'est pas forcément dans X !

Définition 8

Le plus petit élément (aussi appelé minimum) de X, s'il existe, est l'unique élément de l'intersection de X et de ses minorants.

Le plus grand élément (aussi appelé maximum) de X, s'il existe, est l'unique élément de l'intersection de X et de ses majorants.

Le minimum est le minorant dans X ! Le maximum est le majorant dans X !

☐ *Démonstration.* Soient x_1 et x_2 deux minorants (resp. deux majorants) de X.

Par défintion, on a :

$$x_1 \preceq x_2 \quad \wedge \quad x_2 \preceq x_1$$

Par anti-symétrie, on obtient $x_1 = x_2$.

Ainsi, le minorant (resp. majorant) est unique.

■

Définition 9

La borne inférieure de X est le plus grand élément des minorants de X (s'il existe). On la note $\inf$.

La borne supérieure de X est le plus petit élément des majorants de X (s'il existe). On la note $\sup$.

2. Ordre bien fondé

2.1. Relation d'ordre bien fondée et induction

Définition 10

Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est dite bien fondée s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.

Exemple 5

$\leqslant$ sur $\mathbb{N}$ est une relation bien fondée.

$\leqslant$ sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation bien fondée.

Théorème 10.1

La relation d'ordre sur E est bien fondée si, et seulement si, toute partie non vide de E admet un élément minimal (pour cet ordre).

□ *Démonstration.* Soit E un ensemble ordonné par $\prec$, une relation d'ordre bien fondée. Soit X une partie non vide de E.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par l'absurde, supposons que X n'admet pas d'élément minimal.

Comme X n'est pas vide, il existe x_0 dans X. Comme x_0 n'est pas minimal, il existe x_1 dans X. On peut ainsi construire *de proche en proche* une suite infinie strictement décroissante, ce qui contredit la définition de $\preceq$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si toute partie non vide de E admet un élément minimal, c'est en particulier le cas pour une suite strictement décroissante. Soit (u_n) une suite strictement décroissante à valeur dans X. Soit $p \in \mathbb{N}$ l'indice de l'élément minimal de (u_n).

Tous les éléments d'indice supérieur à p doivent être strictement plus petit que u_p, ce qui est impossible. (u_n) est donc finie.

Ainsi, le théorème est vrai.

■

Théorème 10.2 **Induction**

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre bien fondée $\preceq$ et P une propriété de E.

Si pour tout $x \in E$ et pour tout $y \prec x$ telle que $P(y)$ soit vraie, on a alors que P est vraie pour tous les éléments de E.

Ceci est une version généralisée de la récurrence.

□ *Démonstration.* Soit X l'ensemble des x tels que $P(x)$ soit faux.

Si X est non vide, X admet un élément minimal (car $\preceq$ est bien fondée). Donc, tous les y strictement plus petits que x sont vrais. En utilisant l'hypothèse, $P(x)$ est aussi vraie. X est donc vide.

Ainsi, pour tout $e \in E$, $P(e)$ est vraie.

■

Démonstration utilisant l'induction

Elle fonctionne de la même manière qu'une récurrence :

- Si x est un élément minimal, on démontre $P(x)$ sans aucune hypothèse.
- On suppose $P(y)$ pour tous les éléments plus petit que x et on démontre $P(x)$.

Exemple 6

Toutes les démonstrations par récurrence sur $(\mathbb{N}, \leqslant)$ sont des inductions !

2.2. Ordre lexicographique

Définition 11

Soient $(E_1, \preceq_1) \dots (E_n, \preceq_n)$ des ensembles ordonnés.

La relation d'ordre lexicographique $\preceq$ sur $E_1 \times \dots \times E_n$ est définie par :

$$\exists i < n, \forall k < i, \quad (e_k = f_k \wedge e_i \preceq f_i) \quad \vee \quad (e_1, \dots, e_n) = (f_1, \dots, f_n)$$

avec $(e_1, \dots, e_n) \preceq (f_1, \dots, f_n)$

C'est-à-dire, soit ils sont tous égaux, soit il existe un indice i où $e_i \preceq f_i$.

Proposition 11.1

L'ordre lexicographique est une relation d'ordre.

On a bien choisi son nom :D

Exemple 7

Flemme de recopier des exemples, voir le diapo 24 (page 46).

Théorème 11.2

L'ordre lexicographique est bien fondée si $(\preceq_1, \dots, \preceq_n)$ sont bien fondés.

L'ordre du dictionnaire n'est pas bien fondée par contre.