Relations d'ordre, ensembles ordonnés

William Hergès [1]

23 septembre 2025

1. Sorbonne Université

Table des matières

1 ensemble ordoné **2**

1. ensemble ordoné

Définition 1

Une relation d'ordre $\preceq$ est une relation binaire sur E si et seulement si :

- réflexive
- anti-symétrique
- transitive

L'ordre strict $\prec$ est associé à $\preceq$: c'est la même, sauf qu'elle n'est pas réflexive :

$$\prec = \preceq \setminus \mathrm{Id}_E$$

Définition 2

Une relation d'ordre $\preceq$ est :

- totale si et seulement si $\preceq$ permet toujours de comparer deux éléments quelconques de E
- partielle s'il existe au moins deux éléments de E incomparables avec $\preceq$

Définition 3

$(E, \preceq)$ est un ensemble :

- totalement ordonné si $\preceq$ est un ordre total.
- partiellement ordonné si $\preceq$ est un ordre partiel.

Exemple 1

$(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.

$(\mathcal{P}(F), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordoné (pour F un ensemble quelconque).

$(\mathbb{N}^*, |)$ est aussi partiellement ordoné, où

$$| = \{(a, b) | \exists k \in \mathbb{N}^*, b = na\}$$

(c'est la relation divise.)

☐ *Démonstration*. Preuve du deuxième exemple.

Soit F un ensemble.

Montrons que $\subseteq$ est un ordre pour $\mathcal{P}(F)$.

- Soit $A \in \mathcal{P}(F)$. Triviallement, $A \subseteq A$. Alors, $\subseteq$ est réflexive.
- Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Supposons que $A \subseteq B$ et que $B \subseteq A$. Alors, $A = B$ par définition.
- Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(F)^3$ avec $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$. Si A est l'ensemble vide, il est inclu dans tous les ensembles. Donc $A \subseteq C$. Si A n'est pas l'ensemble vide, tous ses éléments sont dans B. Or, tous les éléments de B sont dans C. Donc, tous les éléments de A sont dans C. Alors, $A \subseteq C$.

Ainsi, $\subseteq$ est bien un ordre pour $\mathcal{P}(F)$.

Montrons que $\subseteq$ est un ordre partiel.

Supposons que F contient au moins deux éléments.

Soit $(x, y) \in F^2$, deux éléments différents. Soient $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.

On a que $A \nsubseteq B$ et que $B \subseteq A$. Donc, $\subseteq$ est partiel dans ce cas.

Si F est vide, alors $\mathcal{P}(F)$ contient un unique élément. Cet ensemble est totalement ordonné.

Si F est un singleton, alors $\mathcal{P}(F)$ contient F et l'ensemble vide. Cet ensemble est totalement ordonné.

La slide est ainsi fausse, mais les ensembles à moins de deux éléments sont peux intéressants.

■

Revoir les slides 4 - 6.

Définition 4

Soient $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ deux ensemble ordonnés.

L'application $f : E_1 \to E_2$ est dite monotone si :

$$\forall (x, y) \in E_1^2, \quad x \preceq_1 y \implies f(x) \preceq_2 f(y)$$

Une application monotone préserve les relations d'ordre.

Exemple 2

On se place dans $(\mathbb{N}, \leqslant)$ et dans $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $f(n) = \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\}$ est monotone.

$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $g(n) = \{n\}$ ne l'est pas par contre !

Proposition 4.1

Deux ensembles ordonnés $(E_1, \preceq_1)$ et $(E_2, \preceq_2)$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : E_1 \to E_2$ telle que f et f^{-1} sont monotones.

Slide 8 pour des exemples et pour le retour des graphes.

Attention 1

Une bijection f peut être monotone sans que f^{-1} ne le soit !

□ *Démonstration.* Fin de la slide 8 pour la preuve.

■