Ensembles, relations, fonctions

William Hergès [1]

21 septembre 2025

1. Sorbonne Université

Table des matières

1. Ensembles

1.1. Définition

Définition 1
Ensemble est une réunion dans une même entité de certains objets déterminés. Un ensemble ne possède pas d'ordre.

Définition 2
Relation d'appartenance est noté $\in$. Elle indique si un élément e appartient à un ensemble E.

Définition 3
$\varnothing$ est l'ensemble vide, celui qui ne contient rien.

$\{e\}$ est le singleton e (i.e. l'ensemble contenant exclusivement e).

Définition 4
Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments appartenant à cet ensemble. On le note $|E|$ ou $\mathrm{card}(E)$.

Exemple 1
On a :

$$|\{7.2\}| = 1$$

Attention 1
$2 \notin \{\{2\}\}$

Proposition 4.1
Tout ensemble contient l'ensemble vide.

1.2. Opérations

Définition 5

La relation $A \subseteq B$ indique si A est un sous-ensemble de B, i.e.

$$\forall a \in A, \quad a \in B$$

Proposition 5.1

Cette relation est réflexive, i.e. $E \subseteq E$ est vraie

Définition 6

Cette relation est transitive, i.e. $E_1 \subseteq E_2 \land E_2 \subseteq E_3 \implies E_1 \subseteq E_3$ est vraie.

Définition 7

On dit que $A = B$ si, et seulement si :

$$A \subseteq B \quad \land \quad B \subseteq A$$

i.e.

$$\forall x \in A, \quad x \in B$$

Proposition 7.1

On a que $\subseteq$ est anti-symétrique.

Définition 8

Une relation est dite d'ordre (voir après) si elle est :

- réflexive
- transitive
- anti-symétrique

Elle est dite partielle si elle n'est pas applicable pour tous les éléments.

Proposition 8.1

Comme $\subseteq$ est réflexive, transitive et anti-symétrique, alors $\subseteq$ est une relation d'ordre.

Par contre, deux ensembles ne sont pas nécessairement comparables avec $\subseteq$: il s'agit donc d'une relation d'ordre partielle.

Définition 9

$A \cup B$ est l'union de A et B, deux sous-ensembles de E, tel que :

$$A \cup B = \{x | x \in A \lor x \in B\}$$

$A \cap B$ est l'intersection tel que :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

La construction des ensembles de cette manière est dite par compréhension, comme en programmation fonctionnelle (et en Python).

Définition 10

A et B sont disjoints si, et seulement si :

$$A \cap B = \varnothing$$

Théorème 10.1 **Formule du crible, formule de Poincaré**

Soient A et B deux sous-ensemble de E. On a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| + |A \cap B|$$

Définition 11

La différence $A \backslash B$, deux sous-ensembles de E, est :

$$A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Définition 12

Le complémentaire de A, un sous-ensemble de E, est noté $\bar{A}$ et est défini tel que :

$$\bar{A} = E \backslash A$$

Définition 13

Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Donc :

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Proposition 13.1

Si $E_1, \ldots, E_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\left| \prod_{i=1}^{n} E_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|$$

Proposition 13.2 **Lois de De Morgan**

On a :

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Définition 14

Une partie A d'un ensemble E est un sous-ensemble de E.

$\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Attention 2

$\mathcal{P}(E)$ ne peut jamais être vide !

En effet, on a $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \neq \varnothing$! Ne pas oublier que $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble d'ensemble et que $\varnothing$ est bien un ensemble valide !

Construction de $\mathcal{P}(E)$

Si $E = \varnothing$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$. Sinon, $E = \{e\} \cup F \neq \varnothing$ (e est un élément de E et F est ce qui reste, il peut être vide !).

Proposition :

$$\mathcal{P}(\{e\} \cup F) = \mathcal{P}(F) \cup \{\{e\} \cup A | A \in \mathcal{P}(F)\}$$

Ceci est un appel récursif de la fonction $\mathcal{P}$ permettant ainsi de construire l'ensemble des parties.

Corollaire 1

Si E est un ensemble fini contenant n éléments, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

Définition 15

Soit E un ensemble. Quand on partitionne E, on construit des parties non vides deux à deux disjointes.

Une partition de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E telle que :
- $A_i \neq \varnothing$
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ (pour tout (i, j) dans I)
- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$

Attention 3

Une partition de E n'est pas unique dans le cas générale !

2. Relations

2.1. Définitions

Définition 16

Relation binaire R d'un ensemble E vers F est un sous-ensemble de $E \times F$, i.e.

$$R \subseteq E \times F$$

On peut la noter $(x, y) \in R$, xRy, $R(x, y)$. Lorsque $E = F$, on dit que R est une relation binaire sur E.

Exemple 2

Id_E est la relation identité de E est une relation binaire sur E telle que $\{(e, e) | e \in E\}$.

$\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \{(n, n) | n \in \mathbb{N}\}$

$\leqslant$ sur $\mathbb{N}$ est aussi une relation binaire : $\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 | n_1 \leqslant n_2\}$.

$<$ sur $\mathbb{N}$ est aussi une relation binaire (elle est incluse dans $\leqslant$).

Comme une opération est un ensemble, on peut appliquer les opérations ensemblistes dessus !

Définition 17

Relation n-aire est un sous-ensemble du produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$

Définition 18

Une relation unaire est un sous-ensemble d'un ensemble E.

Définir par compréhension permet d'énoncer la propriété caractéristique de l'ensemble. On peut avoir une même relation pour des propriétés caractéristiques différentes

Définir par extension permet de lister les éléments.

Définition 19

La relation inverse R^{-1} d'une relation $R \subseteq E \times F$ est la relation de F vers E contenant tous les couples (x, y) tels que $(y, x) \in R$, i.e.

$$R^{-1} = \{(x, y) \in F \times E | (y, x) \in R\}$$

Définition 20

Un produit de relation est quand on applique plusieurs relations à la suite.

Le produit de $R_1 \subseteq E \times F$ et de $R_2 \subseteq F \times G$ est définie par :

$$R_1.R_2 = \{(x, y) \in E \times G \quad | \quad \exists z, (x, z) \in R_1 \quad \wedge \quad (z, y) \in R_2\}$$

On la note $R_1 \circ R_2$ ou $R_1.R_2$.

Appliquer $R_1.R_2$ revient à appliquer R_1 puis R_2.

Attention 4

Le produit de relation n'est pas commutatif

Attention 5

$R \cdot R^{-1} \neq \mathrm{Id}_E$!

De même dans l'autre sens.

Proposition 20.1 **Propriétés**

$\varnothing$ est un élément est absorbant des relations : $R \cdot \varnothing = \varnothing \cdot R = R$.

Le produit est associatif : $R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) = (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3$.

Id est l'élément neutre : $R \cdot \mathrm{Id}_F = \mathrm{Id}_E R = R$ (si R est dans $E \times F$). Attention à bien modifier l'ensemble de l'identité en fonction qu'on soit à droite à gauche !

Notations

Si R est une relation sur E, on note :

$$R^n = \underbrace{R \dots R}_{n} = \begin{cases} \mathrm{Id}_E & \text{si} \quad n = 0 \\ R \cdot R^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2. Réflexivité, symétrie, transitivité

Définition 21

La fermeture d'une relation R sur E pour une propriété P est l'ajout du moins d'éléments possibles dans R pour que R vérifie P.

Si cette relation existe, c'est la plus petite relation R' (au sens de l'inclusion) qui contient R et qui vérifie P, i.e.

- $R \subseteq R'$
- R' vérifie P

— si $R \subseteq R''$ et R'' vérifie P, alors $R' \subseteq R''$

Définition 22

Une relation binaire R de E est dite réflexive si, et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad (x, x) \in R$$

i.e. tout élément est en relation avec lui-même.

Définition 23

Une relation binaire R de E est dite symétrique si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$$

i.e. un élément x est en relation avec un élément y, l'élément y est aussi en relation avec x.

Attention 6

$\leqslant$ n'est pas symétrique !

Définition 24

Une relation binaire R de E est dite antisymétrique si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$$

Définition 25

Une relation binaire R de E est dite transitive si, et seulement si :

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$$

Définition 26

La fermeture transitive R^+ de R est l'ajout des éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation transitive, i.e.

$$R^+ = \bigcup_{i \geqslant 1} R^i$$

Exemple 3

$S^+ = \{(n_1, n_2) | \exists n > 0, n_2 = n_1 + n\}$, ce qui est équivalent d'appliquer S^n à n_1 pour obtenir n_2. Cela rend S transitive.

Définition 27

La fermeture réflexo-transitive R^* de R est l'ajout des éléments nécessaires dans R pour obtenir une relation réflexive et transitive, i.e.

$$R^* = \bigcup_{i \geqslant 0} R^i$$

C'est un ajout de l'identité dans R^+.

Définition 28

Une relation binaire est dite totale si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x, y) \in E \vee (y, x) \in E$$

Attention 7

Ne pas confondre avec la symétrie ! C'est bien un "ou" ici.

2.3. Classes d'équivalence

Définition 29

Une relation est dite d'équivalence si, et seulement si, elle est :
- réflexive
- symétrique
- transitive

Une relation est dite d'ordre si, et seulement si, elle est :
- réflexive
- anti-symétrique
- transitive

Comme on l'a vu dans la partie sur les ensembles.

Exemple 4

$\equiv$ (congruence) est une relation d'équivalence.

$\leqslant$ est une relation d'ordre.

$<$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas anti-symétrique !

Définition 30

Soit R une relation d'équivalence sur E. La classe d'équivalence d'un élément

$e \in E$ pour R est noté $[e]_R$ et :

$$[e]_R = \{e' \in E | (e, e') \in R\}$$

$e \in [e]_R$ car R est réflexive

Définition 31

On note $[e]_R$ la classe d'équivalence d'un élément $e \in E$ pour R, i.e.

$$[e]_R = \{e' \in E | (e, e') \in R\}$$

On note $E_{/R}$ l'ensemble quotient de E par R, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de E pour R :

$$E_{/R} = \{[e]_R | e \in E\}$$

Proposition 31.1

$E_{/R}$ forme une partition de E.

3. Fonctions

3.1. Relations et fonctions

Définition 32

Une relation de E vers F est dite déterministe (ou fonctionnelle) si, et seulement si, tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F, i.e.

$$\forall e \in E, \quad \forall (e_1, e_2) \in F^2, \quad (e, e_1) \in R \quad \wedge \quad (e, e_2) \in R \implies e_1 = e_2$$

Exemple 5

S est fonctionnelle.

S^{-1} l'est aussi.

$\leqslant$ ne l'est pas par contre.

Proposition 32.1

Une relation déterministe est une fonction f.

Si f n'est pas définie pour tout l'ensemble de départ, on dit qu'elle est partielle.

☐ *Démonstration.* Une relation déterministe ne donne qu'une unique image.

■

Définition 33

Une relation R de E vers F est dite totale à gauche si, et seulement si, chaque élément de E est en relation avec au moins un élément de F :

$$\forall e_1 \in E, \quad \exists e_2 \in F, \quad (e_1, e_2) \in R$$

Définition 34

Une application est une relation déterministe et totale à gauche, on la note :

$$f : E \to F$$

i.e. tout élément de E possède une (unique) image. On dit parfois qu'elle est une fonction totale.

3.2. Injections, surjections et bijections

Définition 35

Une relation R de E dans F est injective si, et seulement si :

$$\forall e \in F, \quad \forall (e_1, e_2) \in E^2, \quad (e_1, e) \in R \wedge (e_2, e) \in R \implies e_1 = e_2$$

Définition 36

Une relation f de E dans F injective, déterministe et totale à gauche est une application injective (on dit injection), i.e.

$$\forall (e_1, e_2) \in E^2, \quad f(e_1) = f(e_2) \implies e_1 = e_2$$

Définition 37

Une relation R de E dans F est surjective si, et seulement si :

$$\forall e_2 \in F, \quad \exists e_1 \in E^1, \quad (e_1, e_2) \in R$$

Définition 38

Une relation f de E dans F surjective, déterministe et totale à gauche est une application surjective (on dit surjection), i.e.

$$\forall e_2 \in E, \quad \exists e_1 \in E, \quad f(e_1) = e_2$$

Définition 39

Une application injective et surjective est une application bijective (on dit bijective).

Cela implique que tous les éléments de E possèdent exactement un antécédent.

Théorème 39.1

Il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 39.2

Toute bijection f possède une application réciproque notée f^{-1}.

Cette inverse est une application si, et seulement si, f est bijective.

Si f est bijective, f^{-1} l'est aussi, alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

3.3. Ensembles dénombrables et monoïdes

Définition 40

Un ensemble est dit dénombrable si, et seulement si, on peut numéroter tous ses éléments sans répétition et sans omission.

Proposition 40.1

Tout ensemble fini est dénombrable.

Tout ensemble infini en bijection avec $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Deux ensembles ont le même nombre d'élément s'ils sont en bijection.

Définition 41

Un monoïde est un ensemble E muni d'une opération $\odot$ de $E \times E$ dans E telle que :

- elle est associative : $\forall (e_1, e_2, e_3) \in E^3, \quad (e_1 \odot e_2) \odot e_3 = e_1 \odot (e_2 \odot e_3)$
- elle possède un élément neutre e : $\forall e' \in E, \quad e \odot e' = e' \odot e = e'$