TD du 6 mars

William Hergès[1]

6 mars 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

1. Feuille du 20 février

Exercice 4

Soient v_1, v_2 dans P et λ dans $\mathbb{K}$. On a :

$$v_1 + \lambda v_2 = x + 2y + 4z + \lambda x' + \lambda 2y' + \lambda 4z' = 0$$

car $0 + 0$ vaut 0. De plus, $0_P \in P$, donc P est un espace vectoriel.

On peut écrire $x + 2y + 4z = 0$ comme $x + 2y = -4z$. Ainsi, z est lié, donc $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1/4\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix}\right)$, ce qui est aussi la base de P.

Soient v_1, v_2 dans D et λ dans $\mathbb{K}$. On a :

$$v_1 + \lambda v_2 = \begin{pmatrix}x\\-y\\z\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}x'\\-y'\\z'\end{pmatrix} \wedge \dots$$

ce qui vaut bien 0 car $0 + 0 = 0$. De plus, $O_D \in D$, donc D est un ev.

On a :

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & = & -z \\ x & +y & = & z \end{cases}$$

En additionnant L_1 et L_2, on obtient que $x = 0$ et donc que $y = z$. Ainsi, $(0, 1, 1)$ est une base de D et $\dim(D) = 1$.

Mutadis mutandis, H est un ev.

On a :

$$x + y + z + t = 0 \iff x + y + z = -t$$

Donc t est fixé. Une base de H est $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ et donc sa dimension vaut 3.

Exercice 6

Trouver une équation de l'image signifie, trouver une équation dépendant uniquement des variables de l'image. Par exemple, quand on a un ensemble d'équation avec x'_n dépendant de (x_n) décrivant l'image, une équation de l'image dépendra uniquement de (x'_n).

2. Feuille du 6 mars

On a : $(1-\lambda)(3-\lambda)-8=0 \iff \lambda^2-4\lambda-5=0$.
-1 est une valeur propre (solution évidente).
$\Delta = 36 = 6^2$, donc 5 est aussi une solution.

Le sous-espace propre lié à $\lambda = 5$ est l'ensemble des u tels que $(A-5I)u = 0$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} u = 0$$

donc, $u \in \{(a,a), a \in \mathbb{R}\}$.

Le sous-espace propre lié à $\lambda = -1$ est l'ensemble des u tels que $(A+1I)u = 0$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} u = 0$$

donc, $u \in \{(-2a,a), a \in \mathbb{R}\}$.

Ainsi,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} = P^{-1}A\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

On a aussi que $P^{-1} = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$