TD du 13 février

William Hergès[1]

13 février 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Exercice 1

Trivial

Exercice 2

Trivial

Exercice 3

Trivial

Exercice 4

On a :

$$\begin{aligned} 2 &= a - b + c \\ 1 &= a + b - c \\ 3 &= -a + b + c \end{aligned}$$

où (a, b, c) sont les coordonnées du vecteur dans la base.

D'où :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} c &= 5/2 \\ b &= 2 \\ a &= 3/2 \end{aligned}$$

Exercice 5

Si $x = 0$, alors $v = u + w$, donc ce n'est pas libre.
Si $x \neq 0$, alors (uvx) est échelonné, donc elle est libre.

Il s'agit d'une base si et seulement si $x \neq 0$.

Exercice 6

Matrice de changement de base.

On a v un vecteur dans la base canonique. λ est dans la base A et μ dans la base B.

Ainsi, on a :

$$\mathrm{I}_n v = A\lambda$$
$$\mathrm{I}_n v = B\mu$$

d'où :

$$A\lambda = B\mu \iff \mu = B^{-1}A\lambda$$

Ainsi, $B^{-1}A$ est la matrice de passage de A à B.

Exercice 7

$\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$
$\lambda y_1 + y_2 = \lambda x_1 + x_2 + \lambda + 1 \neq \lambda x_1 + x_2 + 1$
donc A n'est pas un sev.

$\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda x_1 + x_2)$
donc A_1 est un sev.

$\lambda v_1 + v_2 = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2)$
$\lambda y_1 = \lambda^2 x^2 \neq x^2$
donc A_2 n'est pas un sev.