TD du 30 janvier

William Hergès[1]

30 janvier 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

Exercice 1

1. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. On fait l'opération inverse (flemme de le faire).

Exercice 2

1. $y = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{1}{5}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & \mid 1 \\ 1 & 1 & \mid 2 \end{pmatrix}$
3. En faisant $l_1 + l_2$, on obtient $2y = 3$, ce qui nous donne les mêmes x et y
4. Son rang est 2.

Exercice 3

Refaire ces transformations chez soi. S_1 n'a pas de solution (car on a une ligne $0 \neq 0$). S_2 possède une infinité de solutions. S_3 possède une infinité de solutions.

On a que la quatrième ligne est la somme des deux premières, on peut donc la supprimer en écrivant $0 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \mid 3 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & \mid 5 \\ -3 & -4 & 3 & 2 & \mid 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \mid 3 \\ 0 & 7 & -6 & -8 & \mid -10 \\ 0 & -7 & 6 & 5 & \mid 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & \mid 3 \\ 0 & 7 & -6 & -8 & \mid -10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble solution de S_3 est donc $\left\{\left(\frac{11-z}{7}, \frac{6z-10}{7}, z, 0\right), z \in \mathbb{R}\right\}$

Technique de la matrice échelonnée réduite pour trouver les inconnues :

1. on fait en sorte que tous les pivots soient égaux à 1 ;
2. on refait des combinaisons linéaires pour que tous les coefficiants (à part les pivots) soient nuls (c'est plus simple de commencer par le dernier pivot).

Il n'est pas possible de faire en sorte que tous les coefficiants soient nuls si le rang de la matrice n'est pas assez élevée. Dans ce cas, on a que les coefficiants nuls doivent forcément être ceux dans les colonnes des pivots.

Exercice 5

1. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 & \mid b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \mid b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & \mid b_3 \end{pmatrix}$
2. On a que $L_1 = 2L_2 - L_3$, donc $b_1 = 2b_2 - b_3$ si le système admet au moins une solution.
3. On a donc que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \mid b_2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & \mid b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \mid b_2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 & \mid b_3 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mid 0 \end{pmatrix}$.

   Donc, x_3 et x_4 sont libres.

   $$x_2 = b_3 - 3b_2 + 5x_3 + 3x_4$$

   et

   $$x_1 = b_3 + 4b_2 - 7x_3 - 6x_4$$

   $S = \left\{(b_4 + 4b_2 - 7x_3 - 6x_4, b_3 - 3b_2 + 5x_3 + 3x_4, x_3, x_4), (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $\mathrm{rg}(S) = 2$

Exercice 8

Si A^{-1} existe, alors il existe v_1, v_2 et v_3 tel que $Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Résolvons $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid b_1 \\ 2 & 1 & 1 & \mid b_2 \\ 1 & 2 & 1 & \mid b_3 \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid b_1 \\ 2 & 1 & 1 & \mid b_2 \\ 1 & 2 & 1 & \mid b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid b_1 \\ 0 & -1 & -1 & \mid b_2 - 2b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \mid b_3 - b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mid b_1 \\ 0 & 0 & -1 & \mid b_2 - 3b_1 + b_3 \\ 0 & 1 & 0 & \mid b_3 - b_1 \end{pmatrix}$$

Donc, $y = b_3 - b_1$, $z = -b_2 + 3b_1 - b_3$ et $x = -b_2 - b_1$. Ainsi,

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11

Le système associé à ce problème est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & | \, 66 \\ 7 & 4 & 3 & | \, 74 \\ 8 & 8 & 9 & | 136 \end{pmatrix}$$