TD du 23 janvier 2025

William Hergès[1]

23 janvier 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Exercice 1

Les produits possibles sont AX, BX, BA, AB et DZ, i.e.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$BX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$DZ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. On a :
$$AB = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$
Donc $AB \neq BA$
2. On a :
$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$
3. On a :
$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$B^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
Après calcul, on obtient que $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
4. Cherchons l'inverse de A :
$$ad - bc = 1 - 0 = 1$$
Donc l'inverse existe, i.e.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
Cherchons maintenant l'inverse de B :
$$ad - bc = 0 + 1 = 1$$
Donc l'inverse existe, i.e.
$$B^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 3

$$A^t = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

puis

$$BA^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 14 \\ -12 & -4 & 4 \\ -8 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. Ce vecteur v peut être représentée par un complexe $z = a + ib$. Or il existe $r, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$, d'où $r\cos\theta + ri\sin\theta$.
2. On a

$$R_\theta \cdot v = r(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) + ir(\sin\phi\cos\theta + \cos\theta\sin\theta)$$

   i.e.

$$R_\theta \cdot v = r\cos(\phi + \theta) + ir\sin(\phi + \theta)$$

Exercice 5

On a :

$$AT = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$DT = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \sqrt{3}-1 & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & 1+\sqrt{3} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1. Soit $P_n : M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que P_n est vraie pour tout n.

   $\boxed{\text{Initialisation}}$ On a $M^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$. Donc P_1 est vraie.

   $\boxed{\text{Hérédité}}$ Posons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. On a :

   $$M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   Donc,

   $$M^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   Or,

   $$M \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   i.e.,

   $$M^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   Alors,

   $$M^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$$

   Ainsi, P_{n+1} est vraie

   $\boxed{\text{Conclusion}}$ P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que

   $$P_n : \quad M^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   est vraie.

   $\boxed{\text{Initialisation}}$ On a $M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$. Donc P_1 est vraie.

   $\boxed{\text{Hérédité}}$ Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie. On a :

   $$M^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$$

   Donc,

   $$M^n M = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} M$$

   i.e.,

   $$M^{n+1} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}$$

Or,

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, P_{n+1} est vraie.

$\boxed{\text{Conclusion}}$ P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.