TD4 Probabilités – 1MA002

Exercice 1 :

Loi continue - Densité de probabilité

On donne la fonction suivante :

$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \qquad f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \quad \text{si} \quad t \geq 0$$

où la variable t représente un temps.

i. Montrer que cette fonction est une densité de probabilité.
   On a pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \geq e^{-2t}$ et donc $f \geq 0$. Ensuite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} (-2(e^{-t})' + (e^{-2t})')\,\mathrm{d}t = 2 - 1 = 1$$

ii. L'intégrale entre les instants t_1 et t_2 (exprimés en minutes) de cette fonction représente en fait la probabilité pour qu'une population d'oiseaux revienne sur leur branche, entre les instants t_1 et t_2, après en être partis, à la suite d'un bruit violent. Quelle est la probabilité que la population d'oiseaux revienne avant 5 minutes ?
   La probabilité est donnée par :

$$P(X \leq 5) = \int_{0}^{5} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{5} (-2(e^{-t})' + (e^{-2t})')\,\mathrm{d}t = -2e^{-5} + e^{-10} + 1$$

iii. Quel est le temps moyen au bout duquel les oiseaux reviennent ?
   Il s'agit d'une espérance (et l'on reconnaît une différence faisant intervenir deux lois exponentielles de paramètres 1 et 2)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = 2 - \frac{1}{2}$$

   soit $1,5$ minutes.

TD4 Probabilités – 1MA002

Exercice 2 :

La durée, X, de l'attente entre l'instant d'ouverture et celui d'arrivée du premier client dans un magasin suit une loi exponentielle. On estime à 5 min la durée moyenne d'attente.

(a) Calculer le paramètre de la loi de X.

(b) Calculer la probabilité que l'on doive attendre un quart d'heure avant que n'arrive le premier client.

(c) Sachant que l'on a attendu cinq minutes et que le premier client n'est toujours pas arrivé, calculer la probabilité qu'il faille attendre encore dix minutes avant l'arrivée d'un client.

La loi est exponentielle.
On mesure le temps en minutes.

(a) On a : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, qui est la fréquence d'arrivée exprimée en client par minute.

(b) $P(X > 15 \text{ min}) = e^{-15/\lambda} = e^{-15/5} = e^{-3} = 0{,}0498$.

(c) Comme la loi exponentielle a la propriété d'absence de mémoire, la probabilité demandée est égale à la probabilité d'attendre 10 min depuis le début, c'est-à-dire : $P(X > 10 \text{ min}) = e^{-10/\lambda} = e^{-2} = 0{,}135$.

TD4 Probabilités – 1MA002

Exercice 3 :

1. $\mathcal{N}(0,1)$

Sachant que $U = \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 1)$, calculer :

(a) $P(U = 1,96)$; $P(U < 1,96)$; $P(U \leqslant 1,96)$; $P(U > 1,96)$; $P(U < -1,96)$; $P(U > 2,575)$.

(b) $P(-1,21 < U < 1,53)$; $P(|U| < 1,96)$; $P(|U| < 2,575)$.

(c) la valeur de u telle que $P(U < u) = 0,10$ ou $P(|U| < u) = 0,8$.

On procède par lecture directe [(a) et (b)] ou par lecture inverse [(c)] de la table de la loi normale.

(a)
- $P(U = 1{,}96) = 0$
- $P(U < 1{,}96) = F(1{,}96) = 0{,}9750$ [définition de la fonction de répartition F]
- $P(U > +1{,}96) = 0{,}025$
- $P(U \leq 1{,}96) = 1 - F(1{,}96)$ [complémentarité] $= 1 - 0{,}9750 = 0{,}025$
- $P(U < -1{,}96) = P(U > +1{,}96) = 0{,}025$ [symétrie de $\mathcal{N}(0,1)$]
- $P(U > 2{,}575) = 1 - F(2{,}575) = 0{,}005$ [complémentarité]

(b) $P(-1{,}21 < U < 1{,}53) = F(1{,}53) - [1 - F(1{,}21)] = 0{,}8239$
- $P(|U| < 1{,}96) = F(1{,}96) - [1 - F(1{,}96)] = 0{,}95$
- $P(|U| < 2{,}545) = 2F(2{,}575) - 1 = 0{,}99$

(c) On cherche u tel que $P(U < u) = 0{,}10$. Comme la probabilité $0{,}10 < 0{,}5$, alors $u < 0$ n'est pas donné dans la table de la loi normale. On cherche donc $-u$ tel que $P(U > -u) = 0{,}10$ ou $P(U < -u) = 0{,}90$; d'où $u = -1.28$.
Pour $P(|U| < u) = P(-u < U < u) = 2F(u) - 1 = 0.8 \Leftrightarrow F(u) = 0{,}90$; d'où : $u = 1{,}28$.

2. **Centrage et réduction de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$**

Sachant que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 5, \sigma = 2)$, calculer :

(a) $P(X < 7)$; $P(X > 1)$; $P(X > 2)$; $P(X < 3)$.

(b) $P(4 < X < 7)$; $P(1 < X < 3)$.

(a) • $P(X < 7) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U < \frac{7-5}{2}\right) = P(U < 1)$ [centrage et réduction] $= F(1) = 0{,}8413$ [lecture dans la table]

• $P(X > 1) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U > \frac{1-5}{2}\right) = P(U > -2) = P(U < 2) = 0{,}033$ [symétrie]

• $P(X > 2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(U > -\frac{3}{2}\right) = P\left(U < \frac{3}{2}\right) = 0{,}933$ [symétrie]

• $P(X > 2) = P(1 < X < 3) = P\left(\frac{1-5}{2} < U < -\frac{3-5}{2}\right) = P(-2 < U < -1) = [1 - F(1)] - [1 - F(2)] = F(2) - F(1) = 0{,}136$ [symétrie]

(b) • $P(4 < X < 7) = \left(\frac{4-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{4-5}{2} < U < \frac{7-5}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < U < 1\right) = F(1) - \left[1 - F\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}6915) = 0{,}533$

• *Méthode directe* :
$P(1 < X < 3) = P\left(\frac{1-5}{2} < U < \frac{3-5}{2}\right) = P(-2 < U < -1) = [1 - F(1)] - [1 - F(2)] = F(2) - F(1) = 0{,}136$

Méthode réutilisant les calculs précédents :
$P(1 < X < 3) = P(X < 3) - P(1 < X) = P(X < 3) - [1 - P(X > 1)] = 0{,}159 - (1 - 0{,}977) = 0{,}136$

3. **Calcul de probabilité avec la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$**

La masse, en grammes, d'une graine de pin pignon suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu = 0{,}5\ ,\ \sigma = 0{,}02)$.

On choisit une graine au hasard.

(a) Avec quelle probabilité aura-t-elle une masse comprise entre $0{,}496$ g et $0{,}504$ g ?

(b) Avec quelle probabilité aura-t-elle une masse exactement égale à $0{,}5$ g ? égale à $(0{,}5 \pm 0{,}01)$ g ?

Soit X, la variable aléatoire qui donne la masse, en grammes, d'une graine de pin pignon. Elle suit une loi normale $N(m = 0{,}5; \sigma = 0{,}02)$.

(a) $P(0{,}496 < X < 0{,}504 = P\left(\frac{0{,}496 - 0{,}5}{0{,}02} < U < \frac{0{,}504 - 0{,}5}{0{,}02}\right) = P\left(-\frac{0{,}04}{0{,}02} < U < \frac{0{,}04}{0{,}02}\right) = P(-0{,}2 < U < 0{,}2) = F(0{,}2) - F(-0{,}2) = F(0{,}2) - [1 - F(0{,}2)] = 2F(0{,}2) - 1 = 2 \times 0{,}6915 = 0{,}1586.$

(b) $P\left(X = \frac{1}{2}\right) = 0$

$P(X = 0{,}5 \pm 0{,}01) = P(0{,}49 < X < 0{,}51) = P\left(\frac{0{,}49 - 0{,}5}{0{,}02} < U < \frac{0{,}51 - 0{,}5}{0{,}02}\right) = P\left(-\frac{0{,}01}{0{,}02} < U < \frac{0{,}01}{0{,}02}\right) = P(-0{,}5 < U < 0{,}5) = 2F(0{,}5) - 1 = 2 \times 0{,}6915 - 1 = 0{,}3830.$