Variables aléatoires

William Hergès [1]

28 mars 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Variables aléatoires discrètes

Souvent il est très compliqué de déterminer une loi de probabilité. On introduit donc les variables aléatoires pour régler ce problème.

Dans le cas d'un lancer de dé, on a :

$$\Omega = \{(i,j)|(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2\} = \{1,\dots,6\}^2$$

Ça donne beaucoup de possibilités, on va donc introduire la notion de variables aléatoires pour résoudre ce problème.

1.1. Définitions

Définition 1

Soit D un ensemble.

On dit que D est dénombrable si et seulement si :
- il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et D
- ou il est fini (son cardinal est différent de ∞)

Définition 2

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un ensemble probabilisé et D un ensemble dénombrable.

Alors, X défini tel que :

$$X : \Omega \to D$$

X est donc une fonction.

Définition 3

La loi de probabilité Q de X est définie telle que :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(D) & \to & [0;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

(D, Q) forme un espace probabilisé.

Écrire $X \in A$ est étrange, car cela veut dire que X, une application, appartient à n'importe quelle ensemble.

On a donc que Q est une nouvelle probabilité fonctionnant comme les autres. Il suffit donc de connaître $Q(\{K\})$ pour tout k dans D pour pouvoir déterminer la variable aléatoire.

Proposition 3.1

On a :

$$Q(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k)$$

On se réduit donc à connaître la probabilité que $X = k$, ce que l'on note p_k.

On a :

$$\sum_{k \in D} p_k = 1$$

Exemple 1

Si on reprend l'exemple du dé en introduction, on a que la probabilité d'avoir p_2 (c'est-à-dire que la somme de $i + j$ vaut 2) est de $1/36$.

1.2. Lois usuelles

Définition 4

On dit que X suit la loi uniforme si, et seulement si, X ne prend qu'une unique valeur.

On note :

$$X \sim \mathcal{U}(n)$$

où n représente le nombre de valeur prise par X.

Définition 5

On dit que X suit la loi de Bernoulli si, et seulement si, X ne prend que les valeurs 0 et 1 et que p est la réussite, alors q, l'échec, vaut $1 - p$.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Exemple 2

Soit $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ et $D = \{0, 1\}$ (on a donc que $D \subseteq \Omega$) où $\mathbb{P}(0 \cup 1) = 1$.
Donc, $p_0 + p_1 = 1$ et $p_0 = 1 - p_1$ car $p_0 \in [0; 1]$.
On a donc que $X : \Omega \to D$ suit la loi de Bernoulli. Si $p_1 = 1/2$, alors on dira que X suit une loi uniforme (et que $p_0 = p_1$).

Pour dire que X suit la loi de Bernoulli, on écrit $\mathcal{B}(p)$. Pour dire que X suit la loi uniforme, on écrit $\mathcal{U}(2)$ (d'une manière générale, 2 est remplaçable par $n \in \mathbb{N}^*$).

Définition 6

On dit que X suit la loi binomiale si, et seulement si, elle est composée d'une somme de variable aléatoire (X_n), où n est fixé, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p fixé.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

On a que X est le nombre de succès rencontré après avoir rencontré n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p.

Proposition 6.1

On a que pour tous les p_k de X d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et p :

$$\forall k \in D, \quad p_k = \mathcal{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

☐ *Démonstration.* On a :

$$\forall k \in D, \quad p_k = \mathcal{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

D'après le binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k \in D} p_k = (p - (p-1))^n = 1$$

■

Définition 7

On dit que X suit la loi de Poisson si, et seulement si, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et pour tout $k \in D$ (où $D = \mathbb{N}$ ici), on a :

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

☐ *Démonstration.* On a :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

par définition de $\exp\{\lambda\}$.

■

1.3. Espérence et variance

Définition 8

On définit l'espérence de X par :

$$E(X) = \sum_{k \in D} k p_k$$

Permet de calculer ce qu'on peut espérer de X.

Définition 9

On définit la variance de X par :

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sum_{k \in D} (k - E(X))^2 p_k$$

Permet de mesurer à quel point on peut s'écarter de l'espérence.

Proposition 9.1

On a :

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Théorème 9.2

Si X suit la loi uniforme de paramètre n avec $D = [1, n]$, alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Théorème 9.3

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$$

Théorème 9.4

Si X suit la loi binomiale de paramètre n et p, alors :

$$E(X) = np$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$$

Théorème 9.5

Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$E(X) = \lambda$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$