Variables aléatoires

William Hergès [1]

10 mai 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Variables aléatoires discrètes

Souvent il est très compliqué de déterminer une loi de probabilité. On introduit donc les variables aléatoires pour régler ce problème.

Dans le cas d'un lancer de dé, on a :

$$\Omega = \{(i,j)|(i,j) \in \{1,\ldots,6\}^2\} = \{1,\ldots,6\}^2$$

Ça donne beaucoup de possibilités, on va donc introduire la notion de variables aléatoires pour résoudre ce problème.

1.1. Définitions

Définition 1 — **Ensemble dénombrable**

Soit D un ensemble.

On dit que D est dénombrable si et seulement si :
- il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et D
- ou il est fini (son cardinal est différent de ∞)

Définition 2 — **Variable aléatoire discrète**

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un ensemble probabilisé et D un ensemble dénombrable.

Alors, X est défini tel que :

$$X : \Omega \to D$$

X est donc une fonction.

Définition 3

La loi de probabilité Q de X est définie telle que :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(D) & \to & [0;1] \\ A & \longmapsto & \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

(D, Q) forme un espace probabilisé.

Écrire $X \in A$ est étrange, car cela veut dire que X, une application, appartient à n'importe quelle ensemble.

On a donc que Q est une nouvelle probabilité fonctionnant comme les autres. Il suffit donc de connaître $Q(\{K\})$ pour tout k dans D pour pouvoir déterminer la variable aléatoire.

Proposition 3.1

On a :

$$Q(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X = k)$$

On se réduit donc à connaître la probabilité que $X = k$, ce que l'on note p_k.

On a :

$$\sum_{k \in D} p_k = 1$$

Exemple 1

Si on reprend l'exemple du dé en introduction, on a que la probabilité d'avoir p_2 (c'est-à-dire que la somme de $i + j$ vaut 2) est de $1/36$.

1.2. Lois usuelles

Définition 4

On dit que X suit la loi uniforme si, et seulement si, X ne prend qu'une unique valeur.

On note :

$$X \sim \mathcal{U}(n)$$

où n représente le nombre de valeur prise par X.

Définition 5

On dit que X suit la loi de Bernoulli si, et seulement si, X ne prend que les valeurs 0 et 1 et que p est la réussite, alors q, l'échec, vaut $1 - p$.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Exemple 2

Soit $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ et $D = \{0, 1\}$ (on a donc que $D \subseteq \Omega$) où $\mathbb{P}(0 \cup 1) = 1$.
Donc, $p_0 + p_1 = 1$ et $p_0 = 1 - p_1$ car $p_0 \in [0; 1]$.
On a donc que $X : \Omega \to D$ suit la loi de Bernoulli. Si $p_1 = 1/2$, alors on dira que X suit une loi uniforme (et que $p_0 = p_1$).

Pour dire que X suit la loi de Bernoulli, on écrit $\mathcal{B}(p)$. Pour dire que X suit la loi uniforme, on écrit $\mathcal{U}(2)$ (d'une manière générale, 2 est remplaçable par $n \in \mathbb{N}^*$).

Définition 6

On dit que X suit la loi binomiale si, et seulement si, elle est composée d'une somme de variable aléatoire (X_n), où n est fixé, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p fixé.

On note :

$$X \sim \mathcal{B}(n,p)$$

On a que X est le nombre de succès rencontré après avoir rencontré n épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p.

Proposition 6.1

On a que pour tous les p_k de X d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètre n et p :

$$\forall k \in D, \quad p_k = \mathcal{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

☐ *Démonstration.* On a :

$$\forall k \in D, \quad p_k = \mathcal{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

D'après le binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k \in D} p_k = (p - (p-1))^n = 1$$

■

Définition 7

On dit que X suit la loi de Poisson si, et seulement si, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ fixé et pour tout $k \in D$ (où $D = \mathbb{N}$ ici), on a :

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

☐ *Démonstration.* On a :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

par définition de $\exp\{\lambda\}$.

■

1.3. Espérance et variance

Définition 8 **Espérance**

On définit l'espérance de X par :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k \in D} k p_k$$

Permet de calculer ce qu'on peut espérer de X.

Définition 9 **Variance**

On définit la variance de X par :

$$\sigma^2(X) = \mathrm{Var}(X) = \sum_{k \in D} (k - E(X))^2 p_k$$

Permet de mesurer à quel point on peut s'écarter de l'espérance.

Proposition 9.1

On a :

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Théorème 9.2

Si X suit la loi uniforme de paramètre n avec $D = [1, n]$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Théorème 9.3

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$\mathrm{E}(X) = p$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$$

Théorème 9.4

Si X suit la loi binomiale de paramètre n et p, alors :

$$\mathrm{E}(X) = np$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Théorème 9.5

Si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \lambda$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda$$

2. Variables aléatoires à densité

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On s'est vite restreint aux probabilités $\mathbb{P}(X^{-1}(A))$, où $A \in \mathcal{P}(D)$ avec D un un ensemble dénombrable et X est de D dans Ω, que l'on a noté $\mathbb{P}(X \in A)$.

Si D est dénombrable, on a que :

$$\sum_{k \in D} p_k = 1$$

où p_k est $\mathbb{P}(X = k)$. Si D n'était pas dénombrable, le symbole somme n'aurait aucun sens !

2.1. Définitions

Définition 10 — **Variable aléatoire à densité**

Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans E, un ensemble pas forcément dénombrable.

Ainsi, $\mathbb{P}(X \in A)$, on a que A est bien souvent une partie de $\mathbb{R}$. On peut donc s'intéresser aux intervalles du style $[a, b]$ où $(a, b) \in E^2$.

Cette variable est à densité s'il existe une fonction f croissante telle que :

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On appelle f la densité de probabilité.

Définition 11 — **Fonction de densité**

On appelle F la fonction de densité de X définie telle que :

$$\forall t \in E, \quad F(t) = \int_{-\infty}^t f(s)\mathrm{d}s$$

où f est la fonction associée à X.

Proposition 11.1

On a donc que :

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbb{P}(X \leqslant b) - \mathbb{P}(X \geqslant a)$$

Proposition 11.2 **Propriétés de la fonction de densité**

Les propriétés de F sont :

— sa croissance

— $0 \leqslant F \leqslant 1$

— $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$, i.e. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$

☐ *Démonstration.* AQT ■

Ces propriétés sont celles analogues pour les variables aléatoires à :

$$\sum_{k\in D} p_k = 1$$

des variables aléatoires discrètes.

2.2. Lois usuelles

Définition 12

On dit que X suit la loi uniforme de paramètre $[a, b]$ si :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{U}([a, b])$$

La fonction de répartition dans ce cas est (si $x \in [a, b]$) :

$$\int_a^x \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a}$$

Définition 13

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note :

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

La fonction de répartition dans ce cas est :

$$\int_0^x \lambda \exp\{-\lambda t\}\,\mathrm{d}t = 1 - \exp\{-\lambda x\}$$

Définition 14

On dit que X suit la loi normale de paramètres μ, son espérence, et σ, son écart type, si pour tout x on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

où f désigne la densité de probabilité de X.

On note souvent :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

où σ^2 représente la variance

Attention, σ est toujours strictement supérieur à 0 !

La fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} \mathrm{d}t$$

2.3. Espérance et variance

Définition 15 **Espérance**

Si X est une variable aléatoire à densité f, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) \mathrm{d}t$$

Définition 16 **Variance**

Si X est une variable aléatoire à densité f, alors :

$$\mathrm{Var}(x) = E(X^2) - E(X)^2$$

ce qui vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) \mathrm{d}t$$

Théorème 16.1

Si X suit la loi uniforme de paramètre $[a, b]$, alors :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

et

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

□ *Démonstration.* AQT

■

Théorème 16.2

Si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème 16.3

Si X suit la loi normale de paramètre m, σ^2, alors :

$$E(X) = m$$

et

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

2.4. Indépendance et suites de variables

Théorème 16.4 — **Inégalité de Markov**

Si X est une variable aléatoire réelle *positive* telle que $E(X)$ est bien définie, on a :

$$\forall r > 0, \quad \mathbb{P}(X \geqslant r) \leqslant \frac{E(X)}{r}$$

Cette preuve est importante niveau notation !

□ *Démonstration.* Notons g la fonction définie par $g(x) = r$ si $x \geqslant r$ et $g(x) = 0$ sinon. g est une variable aléatoire discrète. Alors :

- $\{g(x) = r\} = \{X \geqslant r\}$
- $\{g(x) = 0\} = \{X < r\}$

On a aussi que $g(x) \leqslant x$ pour tout x positif, ce qui nous donne :

$$E(X) \geqslant E(g(x)) = 0 \times \mathbb{P}(X < r) + r\mathbb{P}(X \geqslant r)$$

par croissance de l'espérance. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X \geqslant r) \leqslant \frac{1}{r}E(X)$$

■

Proposition 16.5 **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

Si X est une variable aléatoire réelle telle que $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ sont bien définies, alors :

$$\forall r > 0, \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant r) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{r^2}$$

□ *Démonstration.* Cette formule découle de l'inégalité de Markov : il s'agit du changement de variable $Z = (X - E(X))^2$ qui donne $(X - E(X))^2 \geqslant r^2$, d'où le résultat.

■

Définition 17

On dit que deux variables X et Y sont indépendantes si pour toutes fonctions f et g on a :

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

sous réserve d'espérence bien définie.

Théorème 17.1

Si X et Y sont deux variables réelles indépendantes, on a :

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$

La bonne définition des variances est assurées dans ce cas !

Théorème 17.2 **Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X_k) = E(X_0) \quad \wedge \quad \mathrm{Var}(X_k) = \mathrm{Var}(X_0)$$

et que toutes les variables sont indépendantes deux à deux. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_0)\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On l'appelle aussi LGN.

Théorème 17.3 **Théorème central limite**

On prend une suite respectant les mêmes conditions que celles de la LGN. Pour tout réels $a < b$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_0)}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_0)\right) \in [a, b]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \mathrm{d}x$$

C'est le théorème qui est central, pas la limite. Donc, **pas de e à central** !

On a donc que pour un grand nombre de variables, leur somme est équivalente à une variable aléatoire $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (dite gaussienne centrée réduite). En effet, la somme pour un n assez grand est similaire à la fonction de répartition de la loi normale.