Combinatoire

William Hergès [1]

14 mars 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Notation

Dans cette section, on parle de théorie des ensembles.

On notera toujours E l'ensemble ambient. Soit A un sous-ensemble de E. On le note : $A \subseteq E$ (ou $A \subset E$, mais on l'aime moins celle-là). On note l'inclusion stricte $A \subsetneq E$.

Définition 1
$A \cup B$ est défini comme :

$$x \in A \cup B \quad \Longrightarrow \quad x \in A \quad \vee \quad x \in B$$

On a :

$$A \cup B = \{x \in E \quad | \quad x \in A \vee x \in B\}$$

Définition 2
$A \cap B$ est défini comme :

$$x \in A \cap B \quad \Longrightarrow \quad x \in A \quad \wedge \quad x \in B$$

On a :

$$A \cup B = \{x \in E \quad | \quad x \in A \wedge x \in B\}$$

Définition 3
$A \backslash B$ est défini comme :

$$x \in A \backslash B \quad \Longrightarrow \quad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B$$

On a :

$$A \backslash B = \{x \in E \quad | \quad x \in A \wedge x \notin B\}$$

Définition 4
$E \backslash A$ est le complémentaire de A et est défini comme :

$$\forall x \in E \backslash A \quad \Longrightarrow \quad x \in E \quad \wedge \quad x \notin A$$

On a :

$$E \backslash A = \{x \in E \quad | \quad x \notin A\}$$

Définition 5
Si E est un ensemble fini, on a que $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$ est le nombre d'éléments de E.

Proposition 5.1
On a :
$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A \cap B)$$

Définition 6
Le produit cartésien est noté $\times$ et est :
$$A \times B = \{(x, y) \quad | \quad x \in A, y \in B\}$$

Proposition 6.1
On a :
$$\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(A) \times \mathrm{card}(B)$$

2. Combinaisons

Soit $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, un ensemble de n éléments.

Définition 7

Une combinaison de k éléments parmis les éléments de Ω est un sous-ensemble $A \subseteq \Omega$ tel que $\text{card}(A) = k$.

Proposition 7.1

Le nombre de combinaisons de k éléments parmis les éléments de Ω est :

$$\frac{\text{card}(\Omega)!}{k!(\text{card}(\Omega) - k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $n = \text{card}(\Omega)$, i.e.

$$\binom{\text{card}(\Omega)}{k} = \binom{n}{k}$$

ce qui est un cœfficient binomial.

On peut aussi écrire le cœfficient binomial $\mathcal{C}_n^k = \binom{n}{k}$. $\mathcal{C}$ signifie *combinaison* ! Ici, l'*ordre ne compte pas*.

Il existe aussi $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, ce qui est le nombre de choix possible où l'*ordre compte*. $\mathcal{A}$ pour *arrangement* !

Exemple 1

Une personne qui veut aller à un endroit doit forcément faire une combinaison parmis $\{D, D, D, B, B\}$. (Ceci représente tous les chemins les plus rapides pour y aller : on doit forcément prendre 3 fois droite et deux fois gauche.) Donc, il y a $\binom{5}{2} = 10$ possibilités : il suffit de choisir quand on descend (donc 2 possibilités) pour avoir tous les cas possibles ! (On aurait aussi pu choisir quand on va à droite, mais les calculs sont plus méchants.)

Proposition 7.2

On a :

$$\mathcal{C}_n^k = \mathcal{C}_{n-1}^{k-1} + \mathcal{C}_{n-1}^k$$

i.e.

$$\binom{n}{k} = \binom{k-1}{n-1} + \binom{k}{n-1}$$

Maintenant, voici un énoncé très pratique : le *binôme de Newton*. Le prof l'a démontré en cours, mais j'avais la flemme d'écrire la démo. Voir la démonstration de l'année dernière.

Théorème 7.3 **Binôme de Newton**

On a :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Corollaire 1

On a cette magnifique relation pas très utile :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

□ *Démonstration.* D'après le binôme de Newton, on a :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

i.e.

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

■

Exemple 2

Dans un groupe de 20 personnes, il y a 2^{20} sous-groupes possibles. Il y a 20 tailles de sous-groupes possibles : de 1 à 20. Le nombre de sous-groupe contenant personne est $\binom{20}{0}$, celui contenant une personne est $\binom{20}{1}$, ..., celui contenant 20 personnes est $\binom{20}{20}$. Ainsi, le nombre de sous-groupe est la somme de tout cela et le résultat est donné par la formule juste au dessus.