Applications linéaires et sous espace vectoriel

William Hergès[1]

7 février 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Définition

Définition 1

Une application f est dite linéaire de E dans F (deux sev) si et seulement si :

$$\forall (a,b) \in E^2, \forall (x,y) \in E^2, \quad f(ax+by) = af(x) + bf(y)$$

Théorème 1.1

Toute application linéaire est représentable par une matrice.

Exemple 1

Représentation d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z \end{pmatrix}$$

Définition 2

L'image de A une matrice représentant l'application linéaire f de E dans F est notée $\mathrm{Im}A$ et :

$$\mathrm{Im}A = \{AX | X \in E\}$$

L'image est l'ensemble des éléments atteints par l'application linéaire représentée par A.

Définition 3

Le noyau de A une matrice représentant l'application linéaire f de E dans F est noté $\mathrm{Ker}A$ et :

$$\mathrm{Ker}A = \{X | AX = 0, X \in E\}$$

Le noyau est l'ensemble des éléments donnant 0 par f.

Définition 4

La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteur d'une base (sauf si la base vaut $\{0\}$, dans ce cas là sa dimension vaut 0). On note la dimension de E $\dim E$.

D'une manière formelle, soit f une base de E, on a :

$$\dim(E) = \mathrm{card}(f)$$

(où card est le cardinal de f)

sauf si $f = \{0\}$, où dans ce cas $\dim(E) = 0$.

Théorème 4.1

La dimension de l'image de l'application linéaire f représentée par les matrices AX est égal au rang de A, i.e.

$$\dim \text{Im}A = \text{rg}A$$

Théorème 4.2 **Théorème du rang**

Soit f une application linéaire de E dans F.

On a que :

$$\dim E = \dim \text{Im}A + \dim \text{Ker}A$$

Théorème 4.3

Les vecteurs colonnes au dessus de la matrice A se trouvant au dessus des pivots constituent une base de l'image.

Exemple 2

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Après le pivot de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, une base de l'image est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est déjà échelonné, on a que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une base de l'image.

2. Sous espace vectoriel

Définition 5

Un sous espace vectoriel V est un espace vectoriel si et seulement si :
- $V \neq \varnothing$
- pour tout $v_1, v_2 \in V$, on a $v_1 + v_2$ est bien dans V
- pour tout v dans V et pour tout λ dans $\mathbb{K}$, on a $\lambda v \in V$

Proposition 5.1

L'image et le noyau d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.

3. Déterminer une base du noyau

On a une base de l'image et on a A, la matrice représentant l'application linéaire à l'origine.

On sait que la base du noyau possède $\dim(E) - \dim \mathrm{Im}(A)$ (théorème du rang).

Pour chaque colonne sans pivot, on détermine un vecteur de la base du noyau (voir ce gif)