Familles et bases

William Hergès [1]

31 janvier 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1 **Familles** 2

2 **Base** 2

1. Familles

Définition 1

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$.

La famille est dite liée s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ non tous nuls tel que :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i = 0$$

Définition 2

Si une famille n'est pas liée, alors elle est libre.

Le vecteur nul est toujours dans une famille liée !

Théorème 2.1

La famille $A = (v_1, \dots, v_q)$ est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = q$.

Définition 3

Une famille $A = (v_1, \dots, v_q)$ dans E, un ev de $\mathbb{K}$, est génératrice si et seulement si :

$$\forall b \in E, \quad \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^q, \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i v_i = b$$

Avec une famille génératrice, on peut générer tout l'espace.

2. Base

Définition 4

Une base de E est une famille libre et génératrice.

On note $\dim(E)$ le cardinal d'une base de E.

$\dim(E)$ est unique.

Théorème 4.1

Soit A une famille de vecteurs de cardinal q.

Si le rang de A vaut $\dim(E)$, alors A est génératrice (i.e. $\forall b \in E, \exists X, \quad AX = b$).

(Rappel) Si le rang de A vaut q, alors A est libre (i.e. $\exists! X, \quad AX = 0$).

Une matrice A carrée de $\mathcal{M}_n$ est une base si et seulement si son rang vaut n.

On remarque donc que A est une base s'il existe des opérations élémentaires permettant d'écrire une multiplication des opérations élémentaires successives par A égal à I_n. Cela montre que A est inversible et que A^{-1} est la multiplication des opérations élémentaires successives.

Pour trouver l'inverse, on fait le pivot de Gauss sur la matrice et sur la matrice identité correspondante.

Exemple 1 — **Technique pour trouver l'inverse**

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a que la matrice $\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la première matrice.

NLDR : les étapes sont foireuses mais on a la marche à suivre