Calcul matriciel

William Hergès[1]

31 janvier 2025

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Définition

Définition 1

Une matrice est un l'ensemble de nombre $\{a_{p,q} \in E, p, q \in \mathcal{SN}\}$ où $\mathcal{SN}$ est un intervale de $\mathbb{N}^*$. On note l'ensemble de ces matrices $\mathcal{M}_{p,q}(E)$.

Définition 2

Une matrice carrée est l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{K})$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

On utilise l'abus de notation $\mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ pour parler des matrices carrées d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$.

1.1. Opérations

Définition 3 — **Somme de matrices**

Une somme de matrice est la somme des nombres des matrices.

Si on note $(a_{p,q})$ les nombres de la matrice A et $(b_{p,q})$ les nombres de la matrice B, alors

$$A + B = \{a_{p,q} + b_{p,q}, p, q \in \mathcal{SN}\}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,q} + b_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} + b_{p,1} & \cdots & a_{p,q} + b_{p,q} \end{pmatrix}$$

Définition 4 — **Produit externe**

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $t \in \mathbb{K}$.

On a :

$$tA = (ta_{p,q})_{p,q \in \mathcal{SN}}$$

Proposition 4.1

On a :

- $s(tA) = t(sA)$
- $t(A + B) = tA + tB$
- $(t + s)A = tA + sA$

pour $t, s \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

☐ *Démonstration.* AQT

∎

Proposition 4.2

L'élément neutre pour l'addition est $\tilde{0}$, i.e. l'ensemble $(a_{p,q})_{p,q \in \mathcal{SN}} = 0$.

☐ *Démonstration.* AQT

∎

Définition 5 **Produit matriciel**

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$.

Le produit AB est :

$$\forall (i,k) \in [|1,p|] \times [|1,q|], \quad (ab)_{i,k} = \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} b_{j,k}$$

Attention

On a besoin que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

C'est une forme de produit scalaire !

2. Matrices spéciales

Définition 6

Une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite diagonale si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [|1,p|]^2, \quad i \neq j \implies a_{i,j} = 0$$

Proposition 6.1

La multiplication matricielle des matrices diagonales est commutative et se fait très simplement.

Proposition 6.2

L'élément neutre de $M_p(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale notée I_p telle que :

$$\forall (i,j) \in [|1,p|]^2, \quad i = j \implies 1$$

Définition 7

On note A^{-1} la matrice inverse de A, i.e.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_p$$

Théorème 7.1

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

A^{-1} existe si et seulement si :

$$ad - bc = 0$$

où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{K}$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Mais qu'est-ce $ad - bc$?

Il s'agit d'un déterminant de la matrice A. C'est une notion essentielle que l'on retrouve partout en maths.

Théorème 7.2

Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. Système linéaire

Théorème 7.3

On peut remplacer un système linéaire à x inconnu par une matrice $A \in \mathcal{M}_x$ contenant les coefficiants, $X \in \mathcal{M}_{x,1}$ contenant les inconnues et $B \in \mathcal{M}_{x,1}$ contenant les résultats. On a alors :

$$AX = B$$

Si A est inversible, alors il existe une unique solution à ce système linéaire tel que :

$$X = A^{-1}B$$

Exemple 1

Le système

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,p}x_p &= b_p \end{aligned}$$

est équivalent à

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \ldots & a_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Opérations élémentaires

Ce sont les opérations qui ne font perdre aucune information au système. Il y a :

- permutation de deux lignes, notée $P_{i_1 \to i_2}$ (échange des lignes i_1 et i_2)
- dilatation d'une ligne, notée $D_{i,\alpha \in \mathbb{R}^*}$ (dilatation de la ligne i par α)
- transvection (somme de deux lignes), notée $T_{i_1,i_2,t \in \mathbb{R}}$ (transvection de la ligne i_1 par i_2 avec comme facteur t)

C'est-à-dire, on peut faire des combinaisons linéaires !

Faire cette opération, c'est équivalent à multiplier par une matrice carrée inversible.

Par exemple, pour $P_{2 \to 3}$, on a la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou $D_{2,\alpha\in\mathbb{R}^*}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore $T_{2,3,t}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 7.4

Si r est le rang de $A|B$ (voir le pivot de Gauss), si p est le nombre de colonnes de A et q le nombre de lignes de A, alors :

— si $r = p$, alors pour tout B il existe une solution (existence)

— si $r = q$, alors il existe une unique solution (unicité)

4. Déterminent

Théorème 7.5

A est inversible si et seulement si le rang de A est égal au nombre de colonnes (et de lignes) et si et seulement si le déterminent de A est différent de 0. (On note $\det(A)$ le déterminent de A.)

Proposition 7.6

On a :

- $\det(D)$, où D est une matrice diagonale, est la multiplication des coefficiants de la diagonale
- $\det(T)$, où T est une matrice triangulaire, est aussi la multiplication des coefficiants de la diagonale
- si on multiplie une colonne par α, alors $\det(A') = \alpha \det(A)$ (pour tout α)
- le déterminent ne change pas avec une transvection ou une transposée

Ces propriétés suffisent à calculer tous les déterminents

Exemple 2

Calculons le déterminent de $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= -5 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -5 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -5 \end{aligned}$$