Khôlle 1 - Un peu de formalisme

William Hergès[1]

6 décembre 2024

1. Sorbonne Universite

Table des matières

1. Un peu de formalisme

Durant cette khôlle (ou colle, mais je préfère les mots pseudo-latin), je vais demander une rédaction particulièrement rigoureuse. Ce formalisme est ensentiel pour démontrer formalement des propositions et des théorèmes.

1.1. Assertion, proposition et théorème

Une assertion est un énoncé vrai ou faux, e.g. π est un irrationnel (démonstration complexe mais faisable en fin de Terminal : devoir maison des MPSI d'Henri-IV durant les vacances d'été précédent leur première année et devoir sur table des MP2I/MPSI à Saint-Louis vers janvier).

Une énoncé indiquant la vérité d'une assertion est une proposition ou un théorème. Ce dernier est juste une proposition importante.

Une propriété est une assertion détaillant les éléments fondamentaux découlant d'une définition. Toutes sommes de fonctions continues est continue est une propriété et une proposition.

1.2. Quantification

Tous les éléments doivent être quantifiés à l'aide de quantifieurs ($\forall$, $\exists$, $\exists!$, « Soit », etc.). Un élément non quantité est une faute de rigueur car noous ne savons pas dans quelle condition nous pouvons l'utiliser.

Par exemple, nous n'écrirons pas

$$f(x) = 2x\cos(x)$$

car nous ne quantifions pas x ici. Nous écrirons plutôt :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = 2x\cos(x)$$

où D est un ensemble sur lequel f est définie.

2. Logique

On admet la proposition suivante :

$$\exists x \in \varnothing, \quad P$$

est toujours fausse pour toute assertion P.

Démontrer que

$$\forall x \in \varnothing, P$$

où P une assertion, est toujours vraie.

3. Rigueur en démonstration

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} = 2u_n \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n+1} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrer que pour tout naturel n non nul, $u_n = n$

4. Intégration

Démontrer rigoureusement l'intégration par partie (et la primitivisation par partie).

5. Limite suite

Calculer le $\mathrm{DL}_0(3)$ de $x \longmapsto e^{\cos x}$.

6. Newton

Démontrer le binôme de Newton, i.e. pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$