Khôlle 2 - Équations différentielles et projections

William Hergès[1]

13 décembre 2024

1. Sorbonne Universite

Table des matières

On notera les exercicés créés par M. Kerner et M. Cote, deux professeurs à Henri-IV et à PSL, avec †.

1. Équations différentielles

Dans cette section, on ne traitera que des équations différentielles résolubles, c'est-à-dire que $a(t) = 1$ pour tout t dans D, un interval, où :

$$\forall t \in D, \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

avec y une fonction dérivable sur D et b, c deux fonctions définies sur D.

Proposition 0.1

L'ensemble de définition D de E, une équation différentielle du premier ordre, est

$$D = D_a \cap D_b \cap D_c$$

où D_a est l'ensemble de définition de a (ici $\mathbb{R}$), D_b est celui de b et D_c celui de c.

On rappelera que résoudre correctement une équation différentielle, c'est donner sa solution homogène (souvent notée y_H), sa solution particulière (souvent noté y_P) et son ensemble de définition.

Définition 1

On dit qu'une équation différentielle est linéaire si ces cœfficiants sont constants.

Proposition 1.1

Soit E une équation différentielle linéaire.
Soient y_1 et y_2 deux solutions de E.

On a que toutes les équations de la forme $\lambda y_1 + \mu y_2$ (avec (λ, μ) dans $\mathbb{R}^2$) sont aussi solutions de E, d'où l'appelation linéaire !

1.1. Premier ordre

Exercice 1 - Pour commencer

Résoudre correctement le problème de Cauchy

$$(E): \quad y' + 4ty = 5\cos t \exp\left\{-2t^2\right\} \quad \wedge \quad y(0) = 5$$

Exercice 2 - Une moche devenant belle (†)

Résoudre correctement le problème de Cauchy sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

$$(E): \quad y' + 2(\tan t)y = 2 \quad \wedge \quad y(0) = 0$$

La solution de (E) devra être aussi simple que possible .

1.2. Second ordre

Exercice 3 - Un cas un peu plus général (†)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 2y' + (1-m)y = 0$$

Rappeler l'équation caractéristique de (E).

Exercice 4 - Solution évidente

Résoudre l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 5y' - 4y = 2$$

Exercice 5 - Hors programme (†)

Trouver la solution particulière de

$$(E): \quad y'' + 2y' + 2y = 3e^t \cos(2t)$$

La solution particulière sera de forme $\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)$ avec α et β deux constantes à déterminer.

2. Projection et symetrie

Dans cette partie, on s'intéressera au cours n'étant pas au programme du CC3.

Soit f un endomorphisme linéaire (i.e. $f : X \to X$, où X est un objet mathématique). On note abusivement ff la composition de f par f, i.e.

$$ff = f \circ f$$

On utilisera aussi la notation des puissances pour ce type de composition. On a donc

$$pps = p^2 s = p \circ p \circ s$$

Attention 1

Cette abus de notation ne rajoute en aucun cas la commutativité à la composition !

$$p^2 s \neq psp \neq sp^2$$

2.1. Propriétés utiles

Exercice 1 - Une projection d'une projection reste la même projection

Cette exercice ne demande pas une démonstration formelle : vous n'avez pas accès aux outils formelles nécessaires pour démontrer cette propriété.

Montrer que p est une projection si, et seulement si, $p^2 = p$.

Exercice 2 - Une symétrie d'une symetrie annule la symétrie

Cette exercice ne demande pas une démonstration formelle : vous n'avez pas accès aux outils formelles nécessaires pour démontrer cette propriété.

Montrer que s est une symétrie si, et seulement si, $s^2 = \mathrm{Id}$ où Id est la fonction identitée ($x \longmapsto x$).

2.2. Est-ce une projection?

Exercice 3 - Un cas particulier...(†)

Soient p, q deux projections tels que $pq = 0$. On pose $r = p + q - qp$. Montrez que r est une projection.

Exercice 4 - Du cas général (†)

Soient p, q deux projections. Montrez que $p + q$ est une projection si, et seulement si, $pq = qp = 0$.

A. Corrections des équations différentielles

A.1. Premier ordre

La rédaction sera bien détaillée que pour l'exercice 1 par flemme du correcteur.

Exercice 1 - Pour commencer

(E) est définie sur $\mathbb{R}$.

La solution homogène, y_H est de la forme $\lambda \exp\{-B(x)\}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \int^x b(x)\mathrm{d}x$. $x \longmapsto 2x^2$ est une forme de $B(x)$ valide. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_H(t) = \lambda \exp\left\{-2t^2\right\} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

La solution particulière y_P est de forme $\lambda(t)\exp\{-B(x)\}$ où λ est une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$. On a donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)\exp\left\{-2t^2\right\} = 5\cos t \exp\left\{-2t^2\right\}$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = 5\sin(t)$$

La solution générale est ainsi

$$\left\{\forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda \exp\left\{-2t^2\right\} + 5\sin t | \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

D'après les conditions de Cauchy, $y(0) = 5$, donc

$$\lambda \exp\{0\} + 5\sin t = 5 \iff \lambda = 5$$

La solution de ce problème de Cauchy est donc :

$$\left\{\forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto 5\left(\exp\left\{-2t^2\right\} + \sin t\right)\right\}$$

Exercice 2 - Une moche devenant belle (†)

(E) est définie sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ d'après la consigne.

La solution homogène y_H est $t \longmapsto \lambda \exp\{2\ln|\cos t|\}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution particulière y_P est $t \longmapsto \lambda(x)\exp\{2\ln|\cos t|\}$ où λ est dérivable sur D. D'où, pour tout t dans D,

$$\begin{aligned}
\lambda'(t)\exp\{2\ln|cost|\} &= 2 \\
\lambda'(t)\cos^2(t) &= 2 \\
\lambda'(t) &= \frac{2}{\cos^2 t} \\
&= 2\tan'(t) \\
\lambda(t) &= 2\tan(t)
\end{aligned}$$

Alors
$$\forall t \in D, \quad y_P(t) = 2\tan(t)\cos^2(t) = 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$$

La solution générale est ainsi
$$\left\{\forall t \in D, t \longmapsto \lambda \cos^2(t) + \sin(2t)\right\}$$

D'après les conditions de Cauchy, $y(0) = 0$, donc
$$y(0) = \lambda \cos^2(0) + \sin(0) = 0 \iff \lambda = 0$$

La solution de ce problème de Cauchy est donc :
$$\{\forall t \in D, t \longmapsto \sin(2t)\}$$

A.2. Deuxième ordre

Exercice 3 - Un cas un peu plus général (†)

(E) est définie sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 2r + 1 - m$. Donc $\Delta = 4m$.

$\boxed{\text{Si } m > 0}$ On a $\Delta > 0$. Ainsi $r_1 = -1 + \sqrt{m}$ et $-1 - \sqrt{m}$.

L'ensemble solution de (E) est
$$\left\{\forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda \exp\left\{(-1+\sqrt{m})t\right\} + \mu \exp\left\{(-1-\sqrt{m})t\right\}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$\boxed{\text{Si } m = 0}$ On a $\Delta = 0$. Ainsi $r_1 = r_2 = r - 1$.

L'ensemble solution de (E) est
$$\left\{\forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{-t}\right\}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$\boxed{\text{Si } m < 0}$ On a $\Delta < 0$. Ainsi $r = -1 + i\sqrt{m}$ et $\bar{r} = -1 - i\sqrt{m}$.

L'ensemble solution de (E) est
$$\left\{\forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto e^{-t}\left(\lambda \cos\sqrt{-m} + \mu \sin\sqrt{-m}\right), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 4 - Solution évidente

(E) est définie sur $\mathbb{R}$.

L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 5r - 4 = 0$. Donc $\Delta = 41$.

On a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_H(t) = \lambda \exp\left\{\frac{-5-\sqrt{41}}{2}t\right\} + \mu \exp\left\{\frac{-5+\sqrt{41}}{2}t\right\}$$

où λ et μ sont des constantes réelles.

Comme le second membre est constant, on a que $y_P(t) = -0.5$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour s'en convaincre, il suffit de réinjecter y_P dans (E).

Ainsi, l'ensemble solution est

$$\left\{ \forall t \in \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda \exp\left\{ \frac{-5-\sqrt{41}}{2} t \right\} + \mu \exp\left\{ \frac{-5+\sqrt{41}}{2} t \right\} - 0.5, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 5 - Hors programme (†)

B. Corrections des projections et symétries

B.1. Propriétés utiles

Exercice 1 - Une projection d'une projection reste une projection

Soit p une projection telle que $p(x+y) = x$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a que $p^2(x) = p(p(x+y)) = p(x) = x$. La propriété est donc vérifiée pour p.

Graphiquement, cette propriété est évidente : si on projette M sur une axe donnant ainsi M_x, alors reprojetter M_x sur ce même axe ne change pas M_x.

Si vous voulez la démonstration formelle, envoyez moi un mail

Exercice 2 - Une symétrie d'une symetrie annule la symétrie

Soit s une symétrie telle que $s(x+y) = x - y$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a que $s(s(x-y)) = s(x-y) = x+y$. La propriété est donc vérifiée pour s.

Graphiquement, cette propriété est aussi évidente : si on prend le symétrique de M noté M' par rapport à un axe puis si on reprend le symétrique de M' par rapport au même axe, on obtient M.

Si vous voulez la démonstration formelle, envoyez moi un mail

B.2. Est-ce une projection?

Exercice 3 - Un cas particulier...(†)

On a

$$\begin{aligned}
r^2 &= (p+q-qp)(p+q-qp) \\
&= p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - pqp + qpqp \\
&= p + 0 - 0p + qp + q - 2qp - 0p + 0 \\
&= p + q - qp \\
&= r
\end{aligned}$$

D'après l'exercice 1, on a que r est bien une projection.

Exercice 4 - Du cas général (†)

On procède par double implication ici.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $p+q$ est une projection. Donc

$$(p+q)^2 = p+q \quad \Longleftrightarrow \quad p^2 + pq + qp + q^2 = p + q \quad \Longleftrightarrow \quad pq + qp = 0$$

En composant par p à droite, on a :

$$p^2q + pqp = 0 \quad \iff \quad pq = -pqp$$

En composant par p à gauche, on a :

$$pqp + qp^2 = 0 \quad \iff \quad qp = -pqp$$

Donc

$$pq = qp = -pqp \quad \wedge \quad pq + qp = 0$$

Ce qui nous donne bien que $pq = qp = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $pq = qp = 0$. Donc

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= p^2 + qp + qp + q^2 \\ &= p + q\end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien que $p + q$ est une projection.