Correction TD Complexes

William Hergès [1]

30 septembre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Exercice 1 compléments

On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= 5 + 12i \\ &= (a + ib)^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2ab \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 5 \\ 2ab &= 12 \\ a^2 + b^2 &= |z_1| = 13 \end{aligned}$$

En faisant $(1) + (3)$ et $(3) - (1)$, on obtient que :

$$\begin{aligned} a^2 &= 9 \\ b^2 &= 4 \\ ab &= 6 \end{aligned}$$

Ainsi, a et b sont de même signe. Donc :

$$\{-3 - 2i; 3 + 2i\}$$

est l'ensemble solution de $z^2 = \delta$.

Exercice 2 compléments

On a :

$$\begin{aligned} z^3 &= 2 - 2i \\ &= 2(1 - i) \\ &= 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}+2k\pi}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme les angles sont périodiques sur $2k\pi$, on a que toutes les solutions sont couvertes par $k \in [|0; 2|]$. Ainsi :

$$\left\{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}+\frac{2}{3}k\pi}, k \in [|0; 2|]\right\}$$