Fonctions à deux variables

William Hergès[1]

29 novembre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Fonctions, graphes et courbes de niveau

Dans ce chapitre, nous n'allons traiter que les fonctions à deux variables.

Définition 1

Une fonction f de $D \subset \mathbb{R}^2$ dans $E \subset \mathbb{R}$ est définie telle que :

$$(x, y) \longmapsto f(x, y)$$

On appelle ce type de fonction une fonction à deux variables.

Définition 2

Le graphe de f une fonction à deux variables l'ensemble des points

$$\Gamma_f = \{((x, y), z)|(x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

On peut avoir que f ne dépend qu'une des deux variables, x par exemple. On a alors que son graphe ne dépend pas de y, i.e.

$$\forall (y, y') \in I \subset \mathbb{R}, f(x, y) = f(x, y')$$

Définition 3

On définit C_t tel que :

$$C_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = t\}$$

C_t est une courbe de niveau.

2. Dérivée partielle

Définition 4

Soit f une fonction de $D_1 \times D_2$ dans I.

On note f_{y_0} la fonction de D_1 dans I tel que :

$$\forall s \in D_1, \quad f_{y_0} = f(s, y_0)$$

Mutadis mutandis pour f_{x_0}.

Définition 5

La dérivée partielle de f par rapport à x (resp. y) est la dérivée de f_{y_0} (resp. f_{x_0}). On la note :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_{y_0}$$

Théorème 5.1

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ce qui est la même chose ! Ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Plan tangent

L'équation du plan tangent par f est (x_0, y_0) :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

Définition 6

On pose ∇f le gradient de $f : D_1 \times D_2 \to I$ (où $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^2$ et $I \subset \mathbb{R}$) tel que :

$$\forall (x, y) \in D_1 \times D_2, \quad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Notations de Monge

On note

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} \quad ; \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

On note

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} \quad ; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad ; \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

3. Extrémum

Théorème 6.1

f possède un extremum en (x_0, y_0) implique que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Théorème 6.2

Soient f une fonction à deux variables et (x_0, y_0) est un point critique.
On pose

$$D = rt - s^2$$

avec r, t, s les notations de Monge.

— Si $D > 0$, alors (x_0, y_0) est un extrémum. Il s'agit d'un maximum si $r < 0$ ou d'un minimum si $r > 0$.
— Si $D < 0$, alors (x_0, y_0) n'est pas un extrémum.
— Si $D = 0$, alors tout est possible.

Proposition 6.3

Soit $f : D \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Soit $c \in I$ et $f^{-1}(c)$ un ensemble de niveau de f.
Soit $X : I \to D$ telle que $X(t) \in f^{-1}(c)$ pour tout $t \in I$.

Alors :

$$X'(t)\nabla f(X(t)) = 0$$

pour tout $t \in I$.

☐ *Démonstration.* AQT

■