# Limites

William Hergès[1]

15 novembre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

# Table des matières

# 1. Classe d'une fonction

**Définition 1**

Une fonction est de classe $\mathcal{C}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si sa dérivée $n$-ième est continue.
Une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ ne possède pas de dérivée continue.
Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est dérivable une infinité de fois et que cette dériviée est continue.

**Théorème 1.1** **Théorème des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1_{[a,b]}$.

Il existe $c \in ]a, b[$ tel que :

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Théorème 1.2** **Inégalité des accroissements finis**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1_{[a,b]}$.

S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in ]a, b[, \quad |f'(x)| \leqslant M$$

alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M(b - a)$$

# 2. Comparaison d'ordre de grandeur

**Définition 2**

Soit $x$ de $\mathbb{R}$.

Un voisinage de $x$ est un intervalle ouvert contenant $x$.

**Définition 3**

Une limite $l$ en $a$ de la fonction $f$ défini dans voisinage de $a$ est :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{R}, \quad \forall x > N, \quad f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$$

**Définition 4**

Soient $x$ de $\mathbb{R}$ et $f, g$ deux fonctions définies sur un voisinage $I$ de $x$.

On dit que :

1. $f$ est un petit $o$ de $g$ au voisinage de $x$ (noté $f = o_x(g)$) s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \wedge \quad \lim_{x_0 \to x} \varepsilon(x_0) = 0$$

2. $f$ est équivalente à $g$ au voisinage de $x$ (noté $f \sim_x g$) s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \wedge \quad \lim_{x_0 \to x} \varepsilon = 0$$

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

**Théorème 4.1**

Soient $x \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f, g$ deux fontions définis sur un voisinage $I$ de $x$ avec $g$ ne s'annulant pas en $x$.

On dit que :

1. $f = o_x(g)$ si $\lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 0$
2. $f \sim_x g$ si $\lim_{x_0 \to x} \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = 1$

**Définition 5**

Un développement limité d'ordre $n$ (noté DL$_n$) en $a$ est une fonction telle que

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n + o_{h \to 0}(h^n)$$

où $f$ admet $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

**Théorème 5.1** **Théorème de Taylor**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $I$.

On a que $f$ admet un unique DL$_n$ de forme :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h\to 0}(h^n)$$

On a :

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{x!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln x = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{x!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(a+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x + \ldots + \binom{\alpha}{n} x + o(x^n)}$$

$$\boxed{\binom{\alpha}{n} = \frac{\prod_{k=0}^{n} \alpha - k}{n!}}$$

$$\boxed{\frac{1}{x-1} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

Les fonctions hyperboliques sont comme les fonctions circulaires,

mais sans alternance du signe