Intégration

William Hergès[1]

11 octobre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Définitions et théorèmes fondamentaux

Définition 1

L'intégration de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est l'aire de la région sous la courbe de f et l'axe des absisses. On note ce nombre

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

L'aire sous la courbe est :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{b-a}{i}\right)\frac{b-a}{n}$$

Ce calcul est apparenté au calcul des dérivés.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle, on dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, i.e.

$$F' = f$$

F est toujours déterminée à une constante près.

Théorème 2.1

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Il existe toujours une primitive F de f sur $[a, b]$.
On a alors :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

☐ *Démonstration.* Admis.

■

Ce calcul ne dépend pas de la constance de F.

2. Calculs

2.1. Propriétés

Proposition 2.2
La propriété de Chasles est vraie pour les intégrales

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 2.3
L'intégrale est linéaire

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 2.4
Si $f \geqslant 0$, alors $\int f \geqslant 0$.

Si $f \geqslant g$, alors $\int f \geqslant \int g$.

☐ *Démonstration.* AQT

■

2.2. Intégration par partie

Théorème 2.5 **IPP**
Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

Alors :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

☐ *Démonstration.* Admis.

■

Exemple 1
On a :

$$\int_a^b te^{-t}\mathrm{d}t = [-te^{-t}]_a^b - \int_b^a e^{-t}\mathrm{d}t$$

(en posant $f'(t) = e^{-t}$ et $g(t) = t$)

2.3. Changement de variable

Théorème 2.6

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

Pour toute fonction $\varphi : J \to [a; b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ et tous $\alpha, \beta \in J$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (sous réserve d'existence), on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$$

Quand on a une intégrale trop compliqué, on fait un changement de variable.

Méthode

On cherche à transformer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

en

$$\int_\alpha^\beta g(u)\mathrm{d}u$$

1. On exprime t en fonction de u (i.e. il existe φ tel que $t = \varphi(u)$).
2. On cherche α, β tel que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.
3. On vérifie que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ et l'on calcule $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\mathrm{d}u$, ce qui donne l'ancienne différentielle $\mathrm{d}t$ en fonction de la nouvelle $\mathrm{d}u$.
4. On transforme l'intégrant $f(t)\mathrm{d}t$ en remplaçant $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et t par $\mathrm{d}(u)$. On obtient ainsi un nouvel intégrant de la forme $g(u)\mathrm{d}u$.
5. On écrit la nouvelle intégrale et on obtient bien celle qu'on cherchait.