Fonctions

William Hergès[1]

4 octobre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1 Ensemble de définition et continuité 2

2 Propriétés des applications 2

3 Grands théorèmes 4

4 Dérivation 5

1. Ensemble de définition et continuité

Définition 1

Une fonction f de A dans B prend toutes les valeurs dans A et lui associe une unique valeur dans B.

On appelle A le domaine de définition de f et B l'ensemble d'arrivée de f.
On dit que f est de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2

Une fonction $f : I \to E$ est continue si et seulement si :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Propriétés des applications

Définition 3

Une fonction f de A dans B est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A, \quad f(x) = y$$

Tous les éléments de B sont atteints, comme la tarte.

Définition 4

Une fonction f de A dans B est injective si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in A^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Chaque élément de A possède une image unique.

Définition 5

Une fonction f de A dans B est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Tous les éléments de B sont atteints et est l'image d'un unique antécédent de A.

Définition 6

Une fonction f de A dans B est paire si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x)$$

Définition 7

Une fonction f de A dans B est impaire si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -f(x)$$

Définition 8

Si f de A dans B est bijective, alors il existe une fonction réciproque notée f^{-1} de B dans A tel que :

$$\forall a \in A, \quad f^{-1}(f(a)) = a$$

Proposition 8.1

f^{-1} est bijective et sa réciproque est f.

☐ *Démonstration.* AQT ■

Définition 9

On dit que f est T-périodique si et seulement si :

$$\forall x \in A, \quad f(x) = f(x+T)$$

3. Grands théorèmes

Théorème 9.1 **Théorème des valeurs intermédiaires**

Si f est continue sur $[a, b]$, si pour tout y inclus entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

☐ *Démonstration.* Admis

■

Théorème 9.2 **Théorème de la bijection**

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans E. Si f est strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors :

$$\forall y \in [f(a), f(b)], \quad \exists! c \in [a, b], \quad f(c) = y$$

☐ *Démonstration.* Admis

■

4. Dérivation

Définition 10
La dérivée de f de A dans B est :

$$f' \begin{cases} A \to b \\ x \longmapsto \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \end{cases}$$

si la limite est définie.

Proposition 10.1
Soient deux fonctions f et g dérivables.
On a :

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + g'f$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

☐ *Démonstration.* AQT

■

Définition 11
Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$.
On définit $g \circ f$ la composée de f par g tel que :

$$g \circ f \begin{cases} A \to C \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Proposition 11.1
La dérivée de $g \circ f$ est

$$g \circ f' \times f'$$

☐ *Démonstration.* Chiant mais AQT

■

Théorème 11.2
La dérivée de f^{-1} est (si elle est dérivable) :

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

☐ *Démonstration.* Chiant, mais très intuitif graphiquement

■