Complexes

William Hergès[1]

27 septembre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

1. Présentation

Définition 1

L'ensemble des nombres complexes est :

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$$

où $i^2 = -1$.

On a :

$$\begin{aligned} a + ib + a' + ib' &= a + a' + (b + b')i \\ (a + ib)(a' + ib') &= aa' + aib' + a'ib - bb' \end{aligned}$$

On utilise la lettre z pour les nombres complexes.

Définition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + bi$ (où $a, b \in \mathbb{R}$).

On note $\mathfrak{Re}(z)$ la partie réelle de z qui est a.
On note $\mathfrak{Im}(z)$ la partie imaginaire de z qui est b.
On note $|z|$ le module de z qui est $\sqrt{a^2 + b^2}$.
On note $\arg z$ l'argument de z qui est l'angle entre la droite OZ et la droite $\mathbb{R}^+$ (où Z est le point d'affixe z).

Proposition 2.1 — **Forme trigonométrique**

On peut donc écrire z comme :

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 2.2

On a :

$$\arg z + \arg w = \arg(zw)$$

(où z et w sont deux nombres complexes.)

☐ *Démonstration.* AQT

■

Définition 3 — **Forme exponentielle**

On note $z \in \mathbb{C}$ maintenant :

$$z = |z|e^{i \arg z}$$

avec $e^{i\alpha} := \cos\alpha + i \sin\alpha$

On utilise cette notation car les calculs sont les mêmes que ceux de la forme trigonométrique (cf. la proposition précédente).

Exemple 1

$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ et $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$.

On a :

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$$

2. Racines

Théorème 3.1 **Racines de l'unité**

On a que toutes les solutions de :

$$z^n = 1$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, sont :

$$\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in \mathbb{N}\}$$

☐ *Démonstration.* AQT

■

On peut réduire l'ensemble des k à $[|0; n-1|]$ car l'argument de z est modulo 2π.

Proposition 3.2

La somme des racines de l'unité est nulle

☐ *Démonstration.* AQT

■

2.1. Racine carré d'un complexe

2.1.1. Complexe sous forme exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. On cherche $x \in \mathbb{C}$. On note $x = re^{i\alpha}$ et $z = se^{i\beta}$.

$$\begin{aligned} x^2 &= z \\ (re^{i\alpha})^2 &= re^{i\alpha} \\ r^2e^{2i\alpha} &= se^{i\beta} \end{aligned}$$

x a comme module $\sqrt{|z|}$ et a comme argument $\frac{\beta}{2}$ ou $\frac{\beta}{2} + \pi$.

x est donc

$$\left\{\sqrt{|z|}e^{i\frac{\beta}{2}}, \sqrt{|z|}e^{i\frac{\beta}{2}+\pi}\right\}$$

2.1.2. Complexe sous forme cartésienne

Soit $X \in \mathbb{C}$ tel que $X = x + iy$ (où $x, y \in \mathbb{R}$). Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ (où $a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} X^2 &= z \\ (x+iy)^2 &= a+ib \\ x^2 + 2ixy - y^2 &= a+ib \end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{car on } |x|^2 = |z| \end{aligned}$$

Et on résout.

3. Polynômes

Définition 4

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ une famille de nombres complexes.

On note le polynôme lié à la famille

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$$

Définition 5

Le degré d'un polynôme P est noté $\deg P$ tel que :

$$\lambda_n \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \geqslant n, \quad \lambda_i = 0$$

où n est le degré du polynôme.

Définition 6

Une racine $r \in \mathbb{K}$ du polynôme P est défini telle que $P(r) = 0$.

Théorème 6.1 **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Pour tout polynôme P de degré n, il existe exactement n racines compté avec leur ordre de multiplicité. i.e.

$$P(X) = \lambda_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

où la famille $(x_1, \dots, x_n)$ sont les racines de P.

☐ *Démonstration.* Admis.

■