Rappels

William Hergès[1]

20 septembre 2024

1. Sorbonne Université - Faculté des Sciences, Faculté des Lettres

Table des matières

Rappels en vrac.

1. Vecteur

1.1. Norme d'un vecteur

Définition 1
La norme du vecteur $\vec{v}$ se note $||\vec{v}||$ et

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + (z_b - z_a)^2}$$

1.2. Produit scalaire

Définition 2
Le produit scalaire entre $\vec{v}$ et $\vec{u}$ se note $\vec{v} \cdot \vec{u}$ et

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos\alpha$$

Proposition 2.1
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\vec{u}\vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \vec{u}\vec{w} + \vec{w}\vec{v}$

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 2.2
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
- $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
- $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

☐ *Démonstration.* AQT

■

1.2.1. Produit scalaire dans une bose orthonormée

Définition 3
Un vecteur est alors caractérisé par trois coordonnées (qui sont celles du point

d'arrivé si le vecteur part du point d'origine). On peut alors écrire :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base)

Proposition 3.1

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

(où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ et (x', y', z') sont les coordonnées de $\vec{v}$)

☐ *Démonstration.* AQT

■

1.3. Produit vectoriel

Définition 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans une base orthonormée.

Le produit vectoriel de $\vec{v}$ par $\vec{u}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et est le vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ de norme $u \times v \times \sin\alpha$ (où α est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$) dirigé selon "la règle de la main droite".

Proposition 4.1

On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

☐ *Démonstration.* AQT(besoin de linéarité comme lemme)

■

Attention

$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

Application principale

Il sert à obtenir un vecteur orthogonal à deux autres.

2. Droites et plans

2.1. Droites

Définition 5

Une droite Δ dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ passant par $A = (a, b)$ est l'ensemble des points P sastisfaisant cette relation :

$$\forall M \in P, \quad \exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$$

Proposition 5.1 — **Équations paramétriques**

Une droite Δ dirigée par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ passant par (a, b) possède comme équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

pour un point de coordonnées (x, y) appartenant à Δ.

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 5.2 — **Équation cartésienne**

Une droite Δ dirigée par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ passant par (a, b) possède comme équation cartésienne :

$$y - \frac{\beta}{\alpha}x = b - \frac{a\beta}{\alpha}$$

pour un point de coordonnées (x, y) appartenant à Δ.

☐ *Démonstration.* AQT

■

C'est la même chose dans $\mathbb{R}^3$.

2.2. Plans

Proposition 5.3 — **Équations paramétriques**

Soit Π le plan passant par $A = (a, b, c)$ et dirigé par $\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et par $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

possède comme équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a + t\alpha + s\alpha' \\ y = b + t\beta + s\beta', \quad (t, s \in \mathbb{R}) \\ z = c + t\gamma + s\gamma' \end{cases}$$

pour un point de coordonnées (x, y, z) appartenant à Π.

☐ *Démonstration.* AQT

■

Proposition 5.4

Soit Π un plan passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Soit P un point de Π.

Le vecteur $\overrightarrow{AP}$ est orthogonal à $\vec{w}$ (où $\vec{w}$ est un vecteur orthognal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Autrement dit,

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

☐ *Démonstration.* AQT

■

Cela permet d'obtenir l'équation cartésienne du plan.

3. Familles libres, familles liées

Définition 6

Une famille de n-vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in \mathbb{R}^n$ est libre si, et seulement si, ces vecteurs sont linéairement indépendant. i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \iff \forall i \in [|1, n|], \quad \lambda_i = 0$$

avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition 7

Une famille de n-vecteurs est liée si, et seulement si, elle n'est pas libre.